

УДК 669.187.2

EDN: JMUNFJ

Кухарев А. Л.*Донбасский государственный технический университет**E-mail: alex.kuharev@mail.ru*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ПРИ ЭЛЕКТРОВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЯХ РАСПЛАВА

Приведена математическая модель и результаты численных исследований процесса перемешивания расплава электровихревыми течениями в установке с осесимметричными электродами с использованием метода переноса пассивной примеси. При оценке качества перемешивания проанализировано изменение во времени значений пяти критериев, характеризующих неоднородность расплава, построенных на основе подходов математической статистики. Показано, что при принятых условиях моделирования наиболее удобно использовать критерий, представляющий собой нормированное среднее линейное отклонение концентрации примеси. При моделировании оценена интенсивность турбулентной диффузии по сравнению с конвективным переносом примеси и молекулярной диффузией. Адекватность гидродинамических расчетов подтверждена путем сопоставления модельного поля скорости с экспериментальными данными.

Ключевые слова: *расплав, перемешивание, электровихревое течение, примесь, моделирование.*

Проблема и её связь с научными и практическими задачами. В дуговых сталеплавильных и рудовосстановительных печах протекание электрического тока через расплав приводит к возникновению электровихревых течений (ЭВТ), которые могут способствовать гомогенизации химического состава и температуры в объеме плавильной ванны [1].

В жидких металлах скорость гомогенизации определяется в основном конвективным переносом и турбулентной диффузией, а молекулярная диффузия не оказывает существенного влияния на перемешивание [2, 3].

Для исследования процесса перемешивания в работах [2, 3] используется метод переноса пассивной примеси. Этот метод заключается в том, что в исследуемый объём вводится примесь с такими же физическими свойствами, что и основное вещество. По изменению концентрации примеси можно делать выводы об эффективности процесса перемешивания.

Перенос примеси в расплаве различных технологических установок численно изучался в работах [2–7], при этом некоторые авторы проводили расчеты в двухмерной

постановке [2, 3], что негативно сказывается на учете качественных характеристик турбулентных течений.

Для оценки качества перемешивания используются различные критерии, характеризующие неоднородность (гетерогенность) расплава. В основном эти критерии строятся на основе подходов математической статистики, т. е. представляют собой различные показатели вариации концентрации примеси [2–7]. С увеличением времени моделирования градиенты концентрации примеси уменьшаются. В большинстве исследований считается, что расплав является перемешанным, когда степень неоднородности уменьшается до 5 % [8].

Постановка задачи. В работе [2] исследован отдельно механизм молекулярной диффузии в ванне расплава установки с осесимметричными электродами при ЭВТ. Описание данной установки будет приведено далее. Показано, что при времени перемешивания 10^4 с степень неоднородности расплава еще достаточно высока (более 60 %).

Отметим, что в анализируемых работах, посвященных численным исследованиям переноса примеси [2–7], оценка интенсив-

ности турбулентной диффузии по сравнению с интенсивностью конвективного переноса примеси не проводилась.

В связи с этим **целью** настоящей работы является моделирование процессов перемешивания в ванне расплава и анализ основных показателей качества перемешивания.

Объект исследования — токопроводящие расплавы в технологических установках.

Предмет исследования — процессы перемешивания расплава при электровихревых течениях.

Задачи исследования:

- разработка математической модели переноса примеси с учетом конвективного переноса, молекулярной и турбулентной диффузии;
- анализ структуры электровихревых течений и процессов перемешивания расплава;
- анализ критериев оценки качества перемешивания расплава и роли турбулентной диффузии.

Методика исследования. В качестве объекта моделирования была принята установка, разработанная Объединенным институтом высоких температур РАН [9]. Ванна расплава, заполненная эвтектическим сплавом «индий — галлий — олово» с содержанием по весу In — 67 %, Ga — 20,5 %, Sn — 12,5 % (температура плавления сплава +10,5 °C), представляла собой медный полусферический контейнер диаметром 188 мм. В центре свободной поверхности жидкого металла размещался первый электрод, представляющий собой медный стержень с полусферическим торцом, диаметр которого составлял 5 мм. Электрод погружался в расплав на глубину своего радиуса. Второй электрод располагался в нижней части медного контейнера. Для электропитания установки использовался источник постоянного тока. Выбор данной установки в качестве объекта моделирования обусловлен достаточно большим объемом экспериментальных данных скорости течений, что упрощает процедуру верификации модели. Кроме того, экспе-

риментально подтвержден турбулентный характер течений ($Re \approx 3 \cdot 10^4$) [9]. В целом профиль ванны рассматриваемой установки подобен профилю ванны дуговых сталеплавильных печей постоянного тока [1].

Поле скоростей рассчитывалось на основе стационарного моделирования с использованием модели магнитогидродинамических процессов, детально описанной нами в [1, 10]. При расчете переноса пассивной примеси во временной области поле скоростей оставалось постоянным.

Изложение материала. Геометрическая модель исследуемой установки представлена на рисунке 1. В объем ванны на глубину 35 мм вдоль ее оси введена дополнительная область в виде куба со стороной 10 мм, заполненная примесью.

Расчетная сетка для исследуемой области составляла более 9 млн тетрагональных элементов, причем дополнительное сгущение сетки было выполнено в области верхнего электрода. Моделирование проводилось при следующих свойствах сплава $In-Ga-Sn$: $\rho = 6482$ кг/м³, $\eta = 0,00209$ Па·с, $\sigma = 3300000$ См/м [2].

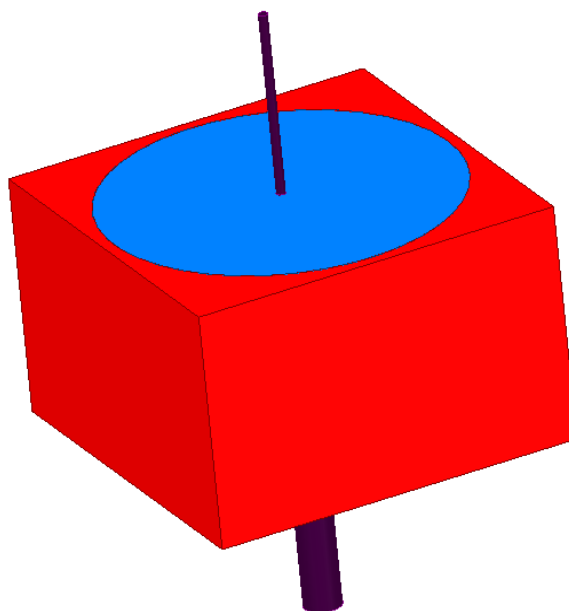


Рисунок 1 — Геометрическая модель исследуемой установки

Результаты расчета гидродинамического поля в пакете Star CCM+, а также сопоставление расчетных и экспериментальных данных при токе в электродах 250 А приведено на рисунке 2.

Как видно из рисунка 2, а, ЭВТ в такой осесимметричной системе имеет форму торoidalного вихря, при этом максимальная скорость в струе расплава достигает ~0,18 м/с. Отметим, что среднее отклонение расчетных и экспериментальных данных не превышает 5 %, что свидетельствует об адекватности используемой модели.

Для моделирования процесса перемешивания примеси при ЭВТ система уравнений магнитной гидродинамики с учетом турбулентности [1, 10] дополняется уравнением переноса пассивной примеси:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) C = (D + D_T) \nabla^2 C, \quad (1)$$

где C — концентрация примеси; $\vec{v}$ — скорость движения расплава, м/с; D — коэффициент молекулярной диффузии, м²/с; Па·с; D_T — коэффициент турбулентной диффузии, м²/с, который определялся по формуле

$$D_T = \frac{\eta_T}{\rho \cdot Sc_T}, \quad (2)$$

где η_T — коэффициент турбулентной вязкости Па·с; ρ — плотность, кг/м³; Sc_T — турбулентное число Шмидта.

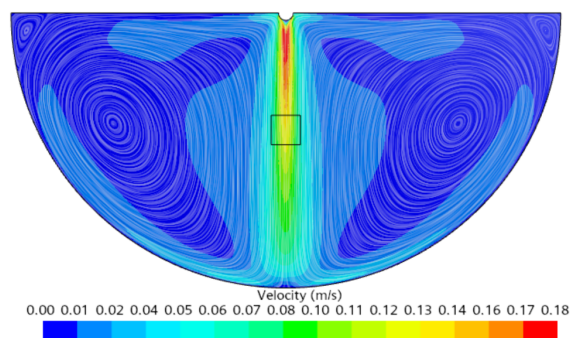
Начальное распределение примеси считается равномерным и равным для дополнительной области C_0 и нулевым для остальной части ванны:

$$\begin{aligned} C_{d.o.}|_{t=0} &= C_0(x, y, z), \\ C_e|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

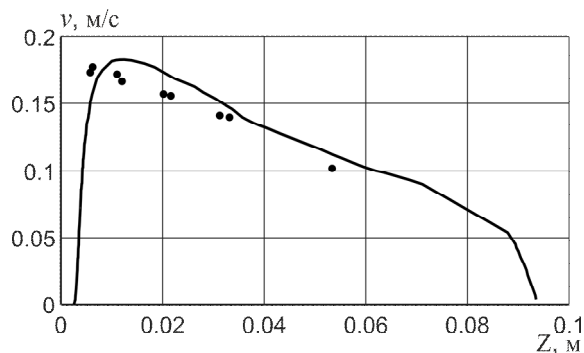
На всех внешних границах использовалось граничное условие второго рода, характеризующее отсутствие потока массы через границу:

$$\left. \frac{\partial C}{\partial \hat{n}} \right|_e = 0, \quad (4)$$

где $\hat{n}$ — внешняя нормаль на соответствующей поверхности.



а



б

— расчет; • эксперимент;

Рисунок 2 — График распределения скорости ЭВТ (а — в сечении ванны; б — вдоль оси ванны)

Моделирование процесса перемешивания проводилось при следующих параметрах: $C_0 = 10^4$ о. е., $D = 5 \cdot 10^{-9}$ м²/с [2], $Sc_T = 0,9$ с использованием алгоритма PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators), который показал высокую эффективность в нестационарных задачах. Шаг по времени составлял $\Delta t = 10^{-3}$ с, при этом число Куранта $Co \approx 0,1$.

Распределение концентрации примеси в относительных единицах в различные моменты времени представлено на рисунке 3.

В начальный момент времени примесь находится только в дополнительной области (рис. 3, а). Примерно через 1 с примесь переносится течением в нижнюю часть ванны, разделяясь на две зоны (рис. 3, б), при этом максимальная концентрация примеси уменьшается более чем в 5 раз.

Далее примесь медленно растекается к периферии, поднимаясь вдоль стенок, а вблизи поверхности направляется к оси ванны, где вновь вовлекается ЭВТ вглубь расплава. При $t \approx 60$ с (рис. 3, *e*) значения концентрации уменьшаются приблизительно на четыре порядка от начальной, при этом состояние расплава близко к полному перемешиванию. Минимальные

значения концентрации наблюдаются вблизи боковых стенок ванны. С момента $t \approx 40$ с и далее четко наблюдается некоторая несимметрия распределения концентрации примеси относительно оси ванны.

Далее рассмотрим особенности применения в нашей задаче критериев, характеризующих неоднородность расплава.

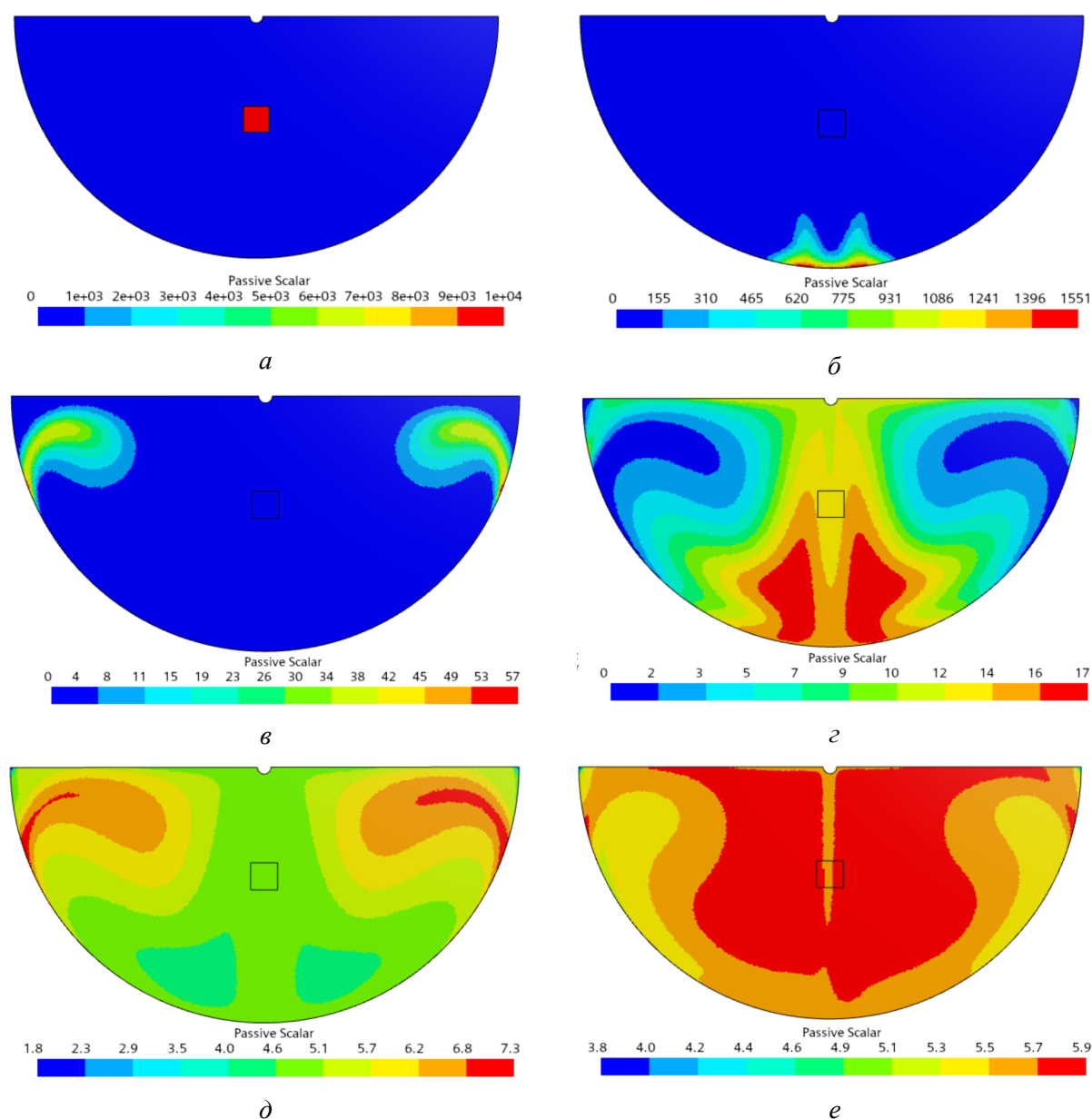


Рисунок 3 — Графики распределения концентрации примеси в сечении ванны в различные моменты времени (*a* — $t = 0$ с; *b* — $t = 1$ с; *c* — $t = 8$ с; *d* — $t = 16$ с; *e* — $t = 40$ с; *f* — $t = 60$ с)

В работе [3] предложено использовать критерий, представляющий собой среднеквадратичное отклонение концентрации примеси во всех ячейках расчетной области от конечной концентрации при полном перемешивании:

$$K_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (C_i - \bar{C}^*)^2 V_i}{V}}, \quad (5)$$

где C_i — концентрация примеси в i -й ячейке; $\bar{C}^* = \frac{1}{V} \int C_i^* dV = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N C_i^* V_i$ — среднее значение концентрации примеси по объему ванны при полном перемешивании; V_i — объем i -й ячейки, м³; V — полный объем, м³; N — количество ячеек в расчетной области.

В работе [4] использовался критерий, представляющий собой коэффициент осцилляции:

$$K_2 = \frac{C_{\max} - C_{\min}}{\bar{C}^*}, \quad (6)$$

где $C_{\max}$, $C_{\min}$ — соответственно одномоментные максимальное и минимальное значения концентрации примеси в объеме ванны.

Отметим, что для обеспечения наглядности и объективности отображения графиков распределения примеси степень неоднородности расплава выражают в долях единицы, тогда при принятых условиях моделирования критерии K_1 и K_2 необходимо нормировать. В работе [3] использовалась нормировка критерия K_1 по максимуму. Также недостатками критериев K_1 и K_2 является использование значений концентрации примеси при полном перемешивании $\bar{C}^*$, что усложняет анализ результатов моделирования.

В работе [11] использовался критерий, представляющий собой коэффициент вариации:

$$K_3 = \frac{\sigma}{\bar{C}}, \quad (7)$$

где $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (C_i - \bar{C})^2 V_i}{V}}$ — среднеквадратическое отклонение концентрации примеси; $\bar{C} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N C_i V_i$ — среднее значение концентрации примеси по объему ванны в текущий момент времени.

В работе [2] использовался критерий, предложенный П. Данквертсом, являющийся среднеквадратичным отклонением концентрации примеси с более сложным нормировочным множителем:

$$K_4 = \frac{\sum_{i=1}^N (C_i - \bar{C})^2 V_i}{\bar{C} (C_{\max}|_{t=0} - \bar{C}) V}. \quad (8)$$

В работе [12] применялся критерий, представляющий собой нормированное среднее линейное отклонение:

$$K_5 = \frac{\sum_{i=1}^N (C_i - \bar{C}) V_i}{2 \bar{C} V}. \quad (9)$$

В диссертации [7] отмечается, что работы по созданию оптимального критерия оценки качества перемешивания все еще продолжаются. Разрабатываются критерии, основанные на базе анализа энтропии, тензора скоростей деформации, тензора завихренности и других параметров.

На рисунке 4 приведены зависимости значений рассмотренных критериев от времени. На графике критерии K_1 и K_2 нормированы по максимуму.

Из рисунка 4 следует, что скорость снижения критериев K_1 , K_2 и K_4 очень высокая. Уже при $t = 8$ с значения этих критериев меньше 0,1, что не соответствует рисунку 3 и неточно отражает особенности процесса перемешивания. Аналогичная скорость снижения критерия K_2 зафиксирована и в работе [2]. При $t \leq 12,35$ с значения критерия K_3 больше 1, а в остальном диапазоне $K_3 < 1$. При $t = 60$ с $K_3 \approx 0,03$. Т. е. изменение критерия K_3 во времени

также не в полной мере отражает моделируемые процессы перемешивания.

Наиболее приемлемым является критерий K_5 . Его график изменения во времени находится между графиками критериев K_1 , K_2 , K_4 и графиком критерия K_3 . Значения критерия K_5 в достаточной степени соответствуют наблюдаемым картинам распределения примеси в ванне. Отметим, что степень гомогенности расплава K_2 связана с коэффициентом неоднородности K следующим выражением [12]:

$$K_2 = 1 - K, \quad (10)$$

где K далее будем считать равным критерию K_5 (9).

Для данного моделирования можно считать, что время перемешивания (при достижении $K=0,05$) составляет ~ 42 с.

Далее рассмотрим влияние турбулентной диффузии на процессы перемешивания. Из уравнения (2) следует, что турбулентная диффузия существенно зависит от коэффициента турбулентной вязкости η_t , график распределения которого приведен на рисунке 5.

Как видно из рисунка 5, имеются четко выраженные максимумы коэффициента турбулентной вязкости в нижней части ванны и вблизи центров вихрей (см. рис. 2, а). При этом максимальные значения турбулентной вязкости превышают молекулярную вязкость более чем в 50 раз.

Нами проведено дополнительное моделирование переноса пассивной примеси при коэффициенте турбулентной диффузии, равном нулю, т. е. $D_t=0$ в уравнении 1. В этом случае в переносе примеси участвуют только конвективный перенос и молекулярная диффузия. В качестве примера на рисунке 6 приведен график распределения концентрации примеси при $t=16$ с.

Из рисунка 6 видно, что без учета турбулентной диффузии перенос примеси происходит в виде достаточно узких областей вдоль линий тока ЭВТ, при этом неоднородность расплава достаточно высока ($K=0,83$).

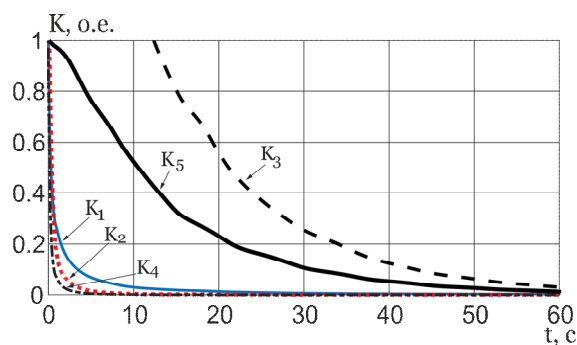


Рисунок 4 — График зависимостей от времени критериев неоднородности расплава

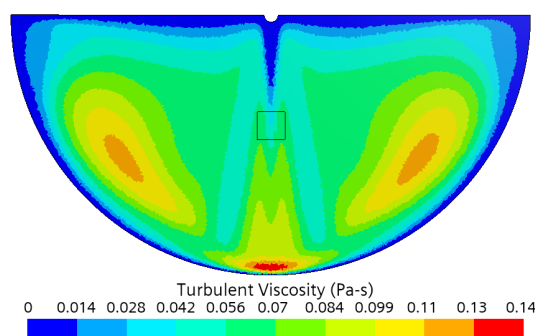


Рисунок 5 — График распределения коэффициента турбулентной вязкости в сечении ванны

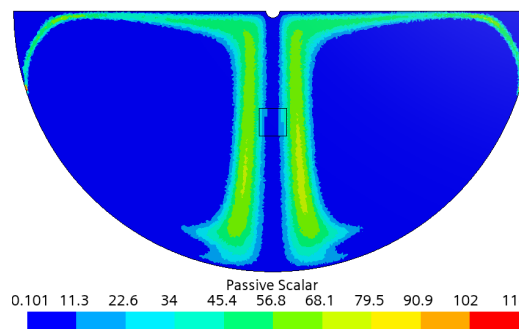


Рисунок 6 — График распределения концентрации примеси в сечении ванны без учета турбулентной диффузии при $t=16$ с.

С учетом турбулентной диффузии (рис. 3, г) коэффициент неоднородности расплава значительно ниже ($K=0,3$). Таким образом, турбулентная диффузия существенно расширяет области распределения примеси, при этом степень гомогенности расплава, рассчитанная по формуле (10), увеличивается более чем в 4 раза.

Выводы и направление дальнейших исследований. Выполненные исследования позволили сделать следующие выводы:

1 В результате проведенных исследований методом математического моделирования уточнены закономерности переноса пассивной примеси в ванне расплава установки с осесимметричными электродами.

2. В результате количественного анализа пяти критериев неоднородности расплава показано, что при принятых условиях моделирования критерии, построенные на основе среднеквадратического отклонения и коэффициента осцилляции, неточно отражают процессы перемешивания расплава за счет большой скорости снижения их

значений во времени, при этом наиболее адекватным является критерий, построенный на основе нормированного среднего линейного отклонения.

3. Оценена роль турбулентной диффузии, которая существенно расширяет области распределения примеси в расплаве и более чем в 4 раза увеличивает степень его однородности.

4. Приведенная методика может применяться при исследовании процессов гомогенизации и рафинирования расплавов в плавильных агрегатах и рудовосстановительных печах, а также в агрегатах для внепечной обработки и разливки.

Список источников

1. Кухарев А. Л. Электромагнитные, гидродинамические и тепловые процессы в многоэлектродных печных установках : монография. Луганск : изд-во ЛГУ им. В. Даля, 2021. 276 с.
2. Vinogradov D., Teplyakov I., Ivochkin Yu. Stirring of liquid metal in electrovortex flow in a hemispherical volume under the influence of external magnetic field // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. 1809. 012034. DOI: 10.1088/1742-6596/1809/1/012034. EDN YOMIAX
3. Оборин П. А., Хрипченко С. Ю. Генерация течения жидкого металла и перенос пассивной примеси в прямоугольной полости беззатухающим магнитным полем // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2013. Т. 6. № 2. С. 207–213. DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.2.24. EDN NPRBWX
4. Математическое моделирование электромагнитного перемешивания жидкой стали в дуговой печи постоянного тока / С. А. Смирнов [и др.] // *Теплофизика высоких температур*. 2010. Т. 48. Вып. 1. С. 74–83. EDN KZYGZT
5. The impact of flow induced by rotating magnetic fields on processes in a molten conductive medium / R. I. Khalilov, A. D. Mamykin, R. S. Okatev, I. V. Kolesnichenko // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. 2023. № 3. Р. 6–16. DOI: 10.17804/2410-9908.2023.3.006-016. EDN HHNSPI
6. Мелешко В. В., Краснополяская Т. С. Смешивание вязких жидкостей // *Нелинейная динамика*. 2005. Т. 1. № 1. С. 69–109. EDN KBXBEP
7. Сухарев Т. Ю. Численное моделирование процессов гидродинамического перемешивания : дис. ... канд. техн. наук. М. : [б. и.], 2019. 127 с. EDN YZMHQM
8. Physical study of the impact of injector design on mixing, convection and turbulence in ladle metallurgy / P. Gajjar [et al.] // *Engineering Science and Technology*. 2019. Vol. 22. № 2. P. 538–547. DOI: 10.1016/j.jestch.2018.11.010
9. Ивочкин Ю. П. Исследование механизмов термогидродинамических и МГД процессов с жидкометаллическими рабочими телами : дис. ... д-ра техн. наук. М. : [б. и.], 2015. 407 с.
10. Моделирование электромагнитных сил и электровихревых течений в установке «ковшовая печь» / А. Л. Кухарев, М. И. Мокрицкий, С. А. Сбитнев, Т. В. Яковенко // *Научные технологии и оборудование в промышленности и строительстве*. 2024. № 5 (79). С. 49–55. EDN MQVUOE
11. Ottino J. M. *The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport*. Cambridge : Cambridge University Press, 1989. 363 p.
12. Optimisation of Catalytic Converter Gas Flow Distribution by CFD Prediction / H. Weltens [et al.] // *SAE Technical Paper 930780*. 1993. P. 131–151. DOI: 10.4271/930780

**Рекомендована к печати к.т.н., проф. каф. МТ ДонГТУ Куберским С. В.,
начальником патентного отдела ООО «ЮГМК» Великоцким Р. Е.**

Статья поступила в редакцию 21.05.2025.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Кухарев Алексей Леонидович, д-р техн. наук, профессор каф. автоматизированного управления и инновационных технологий

Донбасский государственный технический университет,
г. Алчевск, Россия, e-mail: alex.kuharev@mail.ru

Kukharev A. L. (Donbass State Technical University, Alchevsk, Russia, e-mail: alex.kuharev@mail.ru)

MODELING OF MIXING PROCESSES IN ELECTRO-VORTEX MELT FLOWS

The article describes a mathematical model and the results of numerical investigations of the melt mixing process by electro-vortex flows in a unit with axisymmetric electrodes, using the passive impurity transfer method. When assessing the quality of mixing, we analyzed the change in time of the values of five criteria characterizing the melt heterogeneity, constructed on the basis of mathematical statistics approaches. It is shown that under the accepted modeling conditions the criterion, representing the normalized mean linear deviation of the impurity concentration, is the most convenient to use. The simulations assess the intensity of turbulent diffusion in comparison with convective impurity transport and molecular diffusion. The adequacy of hydrodynamic calculations was confirmed by comparing the model velocity field with experimental data.

Key words: melt, mixing, electro-vortex flow, impurity, modeling.

References

1. Kukharev A. L. Electromagnetic, hydrodynamic and thermal processes in multi-electrode furnace units : a monograph [Elektromagnitnye, gidrodinamicheskie i teplovye processy v mnogoelektroodnykh pechnykh ustanovkakh : monografiya]. Lugansk : izd-vo LGU im. V. Dal'ya, 2021. 276 p.
2. Vinogradov D., Teplyakov I., Ivochkin Yu. Stirring of liquid metal in electrovortex flow in a hemispherical volume under the influence of external magnetic field. *Journal of Physics : Conference Series*. 2021. 1809. 012034. DOI: 10.1088/1742-6596/1809/1/012034. EDN YOMIAX
3. Oborin P. A., Khripchenko S. Yu. Generation of liquid metal flow and transfer of passive impurity in a rectangular vugh by a running magnetic field [Generaciya techeniya zhidkogo metalla i perenos pas-sivnoj primesi v pryamougol'noj polosti begushchim magnitnym polem]. *Computational Continuum Mechanics*. 2013. Vol. 6. No. 2. Pp. 207–213. DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.2.24. EDN NPRBWX
4. Smirnov S. A. [et al.]. Mathematical modeling of electromagnetic mixing of liquid steel in DC arc furnace [Matematicheskoe modelirovanie elektromagnitnogo peremeshivaniya zhidkoj stali v dugovoj pechi postoyannogo toka]. *Teplofizika Vysokikh Temperatur*. 2010. Vol. 48. Iss. 1. Pp. 74–83. EDN KZYGZ
5. Khalilov R. I., Mamykin A. D., Okatev R. S., Kolesnichenko I. V. The impact of flow induced by rotating magnetic fields on processes in a molten conductive medium. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. 2023. No. 3. Pp. 6–16. DOI: 10.17804/2410-9908.2023.3.006-016. EDN HHNSPI
6. Meleshko V. V., Krasnopol'skaya T. S. Mixing viscous fluids [Smeshivanie vyazkih zhidkostej]. *Nonlinear Dynamics*. 2005. Vol. 1. No.1. Pp. 69–109. EDN KBXBEP
7. Sukharev T. Yu. Numerical modeling of processes of hydrodynamic mixing : thesis ... of PhD in Engineering [Chislennoe modelirovanie processov gidrodinamicheskogo peremeshivaniya : dis. ... kand. tekhn. nauk]. M. : n. p., 2019. 127 p. EDN YZMHQM
8. Gajjar P. [et al.]. Physical study of the impact of injector design on mixing, convection and turbulence in ladle metallurgy. *Engineering Science and Technology*. 2019. Vol. 22. No. 2. Pp. 538–547. DOI: 10.1016/j.jestch.2018.11.010

9. Ivochkin Yu. P. Investigation of mechanisms of thermohydrodynamic and MHD processes with liquid-metal working bodies : thesis... of Doctor in Techn. Sciences [Issledovanie mekhanizmov termogidrodinamicheskikh i MGD processov s zhidkometallichesкими rabochimi telami : dis. ... d-ra tekhn. nauk]. M. : n. p., 2015. 407 p.

10. Kukharev A. L., Mokrickiy M. I., Sbitnev S. A., Yakovenko T. V. Modeling of electromagnetic forces and electro-vortex flows in the “ladle-furnace” unit [Modelirovanie elektromagnitnyh sil i elektrovihrevykh techenij v ustanovke “kovsh-pech”]. Knowledge-intensive technologies and equipment in industry and building. 2024. No. 5 (79). Pp. 49–55. EDN MQVUOE

11. Ottino J. M. The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport. Cambridge : Cambridge University Press, 1989. 363 p.

12. Weltens H. [et al.]. Optimisation of Catalytic Converter Gas Flow Distribution by CFD Prediction. SAE Technical Paper 930780. Detroit : Society of Automotive Engineers, 1993. Pp. 131–151. DOI: 10.4271/930780

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Kukharev Aleksey Leonidovich, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Automation Management and Innovation Technologies
Donbass State Technical University,
Alchevsk, Russia, e-mail: alex.kuharev@mail.ru