

^{1,*}Левченко О. А., ¹Зинченко А. М., ²Павленко А. Т., ¹Левченко М. Э., ¹Левченко Э. П.

¹Донбасский государственный технический университет,

²Луганский государственный университет им. В. Даля

*E-mail: oksamito@rambltr.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ РАБОТЫ ОДНОВАЛКОВОЙ ЗУБЧАТОЙ ДРОБИЛКИ

Работа посвящена разработке математической модели, описывающей динамику работы одновалковой зубчатой дробилки. Рассмотрены много- и двумасные математические модели, позволяющие оценивать безрезонансную работу машины на основе коэффициента динамичности машинного агрегата.

Ключевые слова: одновалковая зубчатая дробилка, динамика, многомасная модель, двумасная модель, резонанс, коэффициент динамичности машинного агрегата.

Проблема и её связь с научными и практическими задачами. Одной из главных проблем при получении качественного сырья для производства чугуна является выпуск годного агломерата, удовлетворяющего наилучшим условиям по крупности для питания доменных печей [1, 2].

В подавляющем большинстве для дробления агломерационного спека, полученного методом горячего спекания, широкое распространение нашли одновалковые зубчатые дробилки с длинными зубьями, работающие по принципу продавливания массива спечённого коржа железорудного агломерата через зазоры в колосниковой решетке с помощью вращающихся зубьев звездочек ротора [3, 4].

Однако крупность готового продукта, выходящего из машины, при этом не всегда отвечает оптимальным условиям, т. к. обеспечивается большая вероятность образования кусков достаточно крупных размеров, сравнимых с высотой спекания шихты.

С целью стабилизации и выравнивания готового агломерата по фракциям предприятиями постоянно проводится поиск путей совершенствования конструкции одновалковых зубчатых дробилок. Например, уменьшение расстояния между колосниками приводит к существенному возрастанию износа рабочих органов машины, а повышение частоты вращения массивного ротора, массой более 3 т, может приводить к возникно-

ванию повышенных вибраций из-за влияния дисбаланса неуравновешенных масс [5].

Круглосуточный режим работы предприятий черной металлургии не способствует качественному проведению научных исследований и сопряжен с существенными трудностями технологического, организационного и научного характера, что не приветствуется руководством таких предприятий и создает большие неудобства самим исследователям.

Поэтому одним из актуальных направлений исследований расширения возможностей одновалковой зубчатой дробилки могут выступать методы математического моделирования [6, 7] на основе использования уже существующих и прошедших апробацию известных методик.

Постановка задачи. Одним из важных рабочих органов одновалковой зубчатой дробилки выступает узел ротора с размещенными на нем девятью звездочками с длинными зубьями, диаметр которых составляет 1300 мм. С целью обеспечения устойчивой работоспособности машины, ротор приводится в движение с достаточно малой частотой вращения, составляющей 4,7 об/мин, что обеспечивается редуцированием вращения вала ротора электродвигателя с достаточно большим передаточным числом, достигающим до 140, посредством многоступенчатого редуктора.

Это позволяет минимизировать влияние неуравновешенных масс на динамику работы машины. Однако при значительном повышении частоты вращения её рабочие органы и другие элементы могут претерпевать значительные нагрузки, неблагоприятно сказывающиеся на работоспособности и снижающие надёжность конструкции в целом.

В связи с этим, *целью* настоящей работы является разработка математической модели описания динамических режимов одновалковой зубчатой дробилки при её работе на повышенных частотах вращения.

Объект исследования — технологический процесс дробления агломерационного спека в одновалковой зубчатой дробилке горячего агломерата.

Предмет исследования — закономерности описания динамических процессов, связанных с вращением массивного ротора на основе много- и двумассной моделей одновалковой зубчатой дробилки.

Задачи исследования:

– оценка механических процессов, отражающих динамику работы одновалковой зубчатой дробилки;

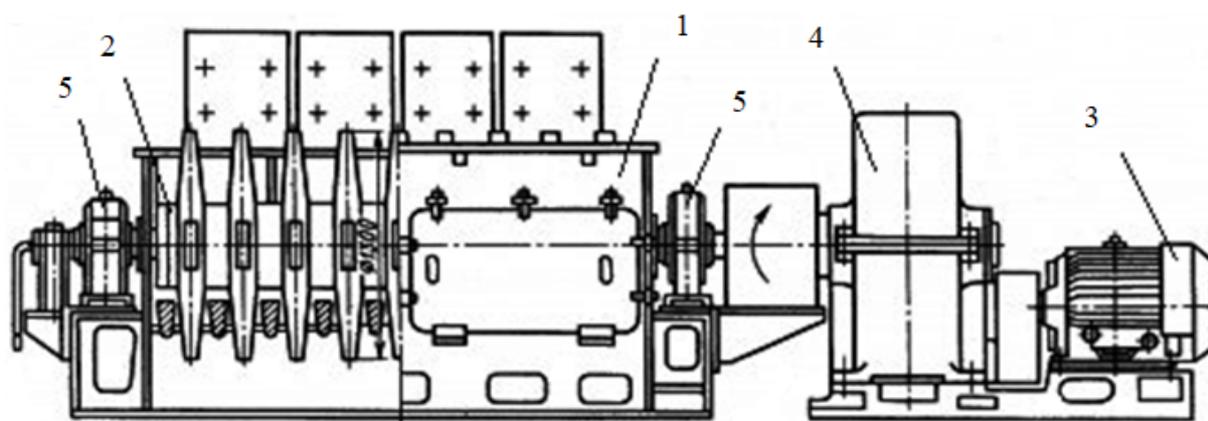
– разработка многомассной математической модели, учитывающей наиболее полное влияние узлов и деталей ротора;

– разработка двумассной математической модели для упрощения численных расчетов динамики машины.

Методика исследования. Исследование динамики работы одновалковой зубчатой дробилки проводили аналитическим путем на основе теоретического обоснования. Более полное математическое обоснование динамических процессов, происходящих в дробилке, описывали её многомассной моделью. Для упрощения численных расчетов определения влияния параметров разрабатывалась двумассная динамическая модель рассматриваемой машины.

Изложение материала. Конструкция одновалковой зубчатой дробилки представляет собой массивный корпус, в котором на подшипниках качения установлен вал с набором звездочек (рис. 1). Ниже имеется горизонтально расположенная колосниковая решетка, составленная из набора отдельных элементов.

Описание механических процессов, происходящих в дробильной машине при дроблении агломерационного спека, имитируется многомассной математической моделью с учетом динамических процессов, характерных для работы одновалковой зубчатой дробилки [8, 9] на основе структуры, показанной на рисунке 2.



1 — корпус; 2 — зубчатый ротор; 3 — электродвигатель; 4 — редуктор; 5 — подшипниковые узлы

Рисунок 1 — Конструктивная схема одновалковой зубчатой дробилки горячего агломерата

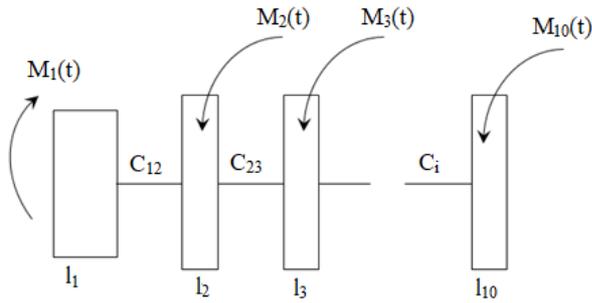


Рисунок 2 — Схема многомассной модели одновалковой зубчатой дробилки

Крутящий момент, создаваемый асинхронным трехфазным электродвигателем рассматриваемой конструкции дробильной машины, выразим через $M_1 = M_{\text{дв}}$. Он определяется по математической формуле, приведенной ниже:

$$M_{\text{дв}} = M_n \cdot \frac{\omega_0 - \omega_{\text{дв}}}{\omega_0 - \omega_n}, \quad (1)$$

где ω_0 — синхронная угловая скорость вращения вала ротора электродвигателя; ω_n — номинальная угловая скорость вращения вала ротора электродвигателя; $\omega_{\text{дв}}$ — действительная угловая скорость вала электродвигателя.

Составим уравнения вращающихся на валу масс (без учета редуктора) [9]:

$$\begin{cases} I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 = M_1 - M_{1,2} \\ I_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 = M_{1,2} - M_2 - M_{2,3} \\ \dots \\ I_i \cdot \ddot{\varphi}_i = M_{i-1,i} - M_i - M_{i,i+1} \\ \dots \\ I_{10} \cdot \ddot{\varphi}_{10} = M_{9,10} - M_{10}, \end{cases} \quad (2)$$

где I_i — момент суммы мощностей приводимых моментов i -ого ряда дробящих звездочек относительно оси вращения ротора машины ($i=2, 10$); I_1 — момент инерции вала электродвигателя; $\varphi_i = \varphi_i(t)$ — угловое положение i -той массы; M_2, \dots, M_{10} — результирующие моменты внешних сил, действующие

на каждую массу; M_{ji} — моменты сопротивления упругой деформации в соединениях; C_{ji} — жесткости соответствующих упругих связей различных дискретных масс.

Для учета углов поворотов и моментов упругостей воспользуемся соотношениями

$$\begin{cases} M_{1,2} = C_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \\ M_{2,3} = C_{23} \cdot (\varphi_2 - \varphi_3) \\ \dots \\ M_{i-1,i} = C_{i-1,i} \cdot (\varphi_{i-1} - \varphi_i) \\ \dots \\ M_{9,10} = C_{9,10} \cdot (\varphi_9 - \varphi_{10}). \end{cases} \quad (3)$$

Ввиду того, что момент M_1 от трехфазного асинхронного электродвигателя задается формулой (1), система (2) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 = M_n \cdot \frac{\omega_0 - \omega_{\text{дв}}}{\omega_0 - \omega_n} - M_{1,2} \\ I_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 = M_{1,2} - M_2 - M_{2,3} \\ \dots \\ I_i \cdot \ddot{\varphi}_i = M_{i-1,i} - M_i - M_{i,i+1} \\ \dots \\ I_{10} \cdot \ddot{\varphi}_{10} = M_{9,10} - M_{10}. \end{cases} \quad (4)$$

Так как системы (3) и (4) имеют девятнадцать уравнений и столько же неизвестных функций $\varphi_1 = \varphi_1(t), \dots, \varphi_{10} = \varphi_{10}(t)$; $M_{12} = M_{12}(t), \dots, M_{9,10} = M_{9,10}(t)$, то можем исключить из уравнений (3) и (4) десять неизвестных функций от φ_1 до φ_{10} .

$$C_{1,2} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = - \frac{M_n \cdot C_{1,2} \cdot \ddot{\varphi}_1}{(\omega_0 - \omega_n) \cdot I_1} - \frac{\dot{M}_{1,2} \cdot C_{1,2}}{I_1} - \frac{\dot{M}_{1,2} \cdot C_{1,2}}{I_2} + \frac{\dot{M}_2 \cdot C_{1,2}}{I_2} + \frac{\dot{M}_{2,3} \cdot C_{1,2}}{I_2}. \quad (5)$$

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Для этого выполним деление первого и второго уравнения (4) соответственно на I_1 и на I_2 , а затем вычтем из первого уравнения второе, продифференцировав полученную разность [9].

Получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \overset{\bullet\bullet\bullet}{M}_{1,2} - C_{1,2} \cdot \frac{\overset{\bullet}{M}_{2,3}}{I_2} + \beta_{1,2} \cdot \overset{\bullet}{M}_{1,2} = \\ = C_{1,2} \cdot \frac{\overset{\bullet}{M}_2}{I_2} - \frac{M_n \cdot C_{1,2} \cdot \overset{\bullet\bullet}{\varphi}_1}{(\omega_0 - \omega_n) \cdot I_1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\beta_{1,2}$ — циклическая частота, характеризующая собственные колебания двумассной системы:

$$\beta_{1,2} = \sqrt{C_{1,2} \cdot \frac{I_1 + I_2}{I_1 \cdot I_2}}. \quad (7)$$

Прибавим и отнимем величину $\frac{M_n \cdot C_{1,2} \cdot \overset{\bullet\bullet}{\varphi}_1}{(\omega_0 - \omega_n) \cdot I_1}$ из правой части (6). При этом

изменим значение $\overset{\bullet\bullet}{\varphi}_2$, как во втором уравнении (4). Тогда получим

$$\begin{aligned} + \frac{\beta_{1,2}^2 \cdot M_n \cdot M_{1,2}}{(I_1 + I_2) \cdot (\omega_0 - \omega_n)} - \frac{C_{1,2} \cdot \overset{\bullet}{M}_{2,3}}{I_2} - \\ - \frac{\beta_{1,2}^2 \cdot M_n \cdot M_{2,3}}{(I_1 + I_2) \cdot (\omega_0 - \omega_n)} = \frac{C_{1,2} \cdot \overset{\bullet}{M}_2}{I_2} + \\ + \frac{\beta_{1,2}^2 \cdot M_n \cdot M_2}{(I_1 + I_2) \cdot (\omega_0 - \omega_n)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Разделим второе и третье составляющие системы уравнений (4) соответственно на I_2 , и I_3 . После этого из третьего уравнения отнимем второе с умножением оставшихся составляющих (4) на $C_{2,3}$. Таким образом, будем иметь зависимости (9), представленные ниже.

А так как можно предположить, что все ряды рабочих элементов дробилки работают в примерно равных геометрических и

механических условиях, можно допустить соотношения (10), приведенные в последующем изложении.

Тогда с учётом (7) математические зависимости (5) и (6) будут преобразованы в соотношения (11).

$$\begin{aligned} \overset{\bullet\bullet}{M}_{2,3} - \frac{C_{2,3} \cdot M_{1,2}}{I_2} + \beta_{2,3}^2 \cdot M_{2,3} - \\ - \frac{C_{2,3} \cdot M_{3,4}}{I_3} = \frac{C_{2,3} \cdot M_2}{I_2} + \frac{C_{2,3} \cdot M_3}{I_3}, \\ \dots \\ \overset{\bullet\bullet}{M}_{8,9} - \frac{C_{8,9} \cdot M_{7,8}}{I_9} + \beta_{8,9}^2 \cdot M_{8,9} - \\ - \frac{C_{8,9} \cdot M_{8,9}}{I_9} = \frac{C_{8,9} \cdot M_8}{I_8} + \frac{C_{8,9} \cdot M_9}{I_9}, \\ \dots \\ \overset{\bullet\bullet}{M}_{9,10} - \frac{C_{9,10} \cdot M_{8,9}}{I_{10}} + \beta_{9,10}^2 \cdot M_{9,10} = \\ = \frac{C_{9,10} \cdot M_9}{I_9} + \frac{C_{9,10} \cdot M_{10}}{I_{10}}. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} I_2 = I_3 = \dots = I_{10} = I, \\ C_{2,3} = C_{3,4} = \dots = C_{9,10} = C, \\ \beta_{2,3}^2 + \beta_{3,4}^2 \dots \beta_{9,10}^2 = \beta^2, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\beta^2 = \frac{2 \cdot C}{I}, \quad \beta_{1,2}^2 = C_{1,2} \cdot \frac{I_1 + I}{I_1 \cdot I}.$$

$$\begin{aligned} \overset{\bullet\bullet\bullet}{M}_{1,2} + \frac{M_n \cdot \overset{\bullet\bullet}{M}_{1,2}}{(\omega_0 - \omega_n) \cdot I_1} + \beta_{1,2}^2 \cdot \overset{\bullet}{M}_{1,2} + \\ + \frac{\beta_{1,2}^2 \cdot M_n \cdot M_{1,2}}{(I_1 + I_2) \cdot (\omega_0 - \omega_n)} - \frac{C_{1,2} \cdot \overset{\bullet}{M}_{2,3}}{I_2} - \\ - \frac{\beta_{1,2}^2 \cdot M_n \cdot M_{2,3}}{(I_1 + I_2) \cdot (\omega_0 - \omega_n)} = \frac{C_{1,2} \cdot \overset{\bullet}{M}_2}{I_2} + \\ + \frac{\beta_{1,2}^2 \cdot M_n \cdot M_2}{(I_1 + I_2) \cdot (\omega_0 - \omega_n)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Полученная система уравнений (12) содержит девять неоднородных дифферен-

циальных уравнений и девять неизвестных, к которым относятся крутящие моменты $M_{12}, M_{23}, M_{34}, \dots, M_{89}, M_{9,10}$.

$$\left\{ \begin{aligned} & \ddot{M}_{1,2} + \frac{M_n \cdot \ddot{M}_{1,2}}{I_2 \cdot (\omega_0 - \omega_n)} + \beta_{1,2}^2 \cdot \dot{M}_{1,2} + \\ & + \frac{\beta_{1,2}^2 \cdot M_n \cdot M_{1,2}}{(I_1 + I) \cdot (\omega_0 - \omega_n)} - \frac{C_{1,2} \cdot \dot{M}_{2,3}}{I} - \\ & - \frac{\beta_{1,2}^2 \cdot M_n \cdot M_{2,3}}{(I_1 + I) \cdot (\omega_0 - \omega_n)} = \frac{C_{1,2} \cdot \dot{M}_2}{I} + \\ & + \frac{\beta_{1,2}^2 \cdot M_n \cdot M_2}{(I_1 + I) \cdot (\omega_0 - \omega_n)}, \\ & \ddot{M}_{8,9} - \frac{C \cdot M_{7,8}}{I} + \beta^2 \cdot M_{8,9} - \\ & - \frac{C \cdot M_{9,10}}{I} = -\frac{C \cdot M_8}{I} + \frac{C \cdot M_9}{I}, \\ & \ddot{M}_{9,10} - \frac{C \cdot M_{8,9}}{I} + \beta^2 \cdot M_{9,10} = \\ & = \frac{C \cdot M_9}{I} + \frac{C \cdot M_9}{I}. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Моменты $M_2(t) \dots M_{10}(t)$ зависят от внешних нагрузок, возникающих от взаимодействия зубьев звездочек и раздробливаемого агломерата на рабочие органы машины. Следовательно, их можно считать заданными величинами.

Для более равномерной нагрузки на двигатель и зубья звездочек дробилки, а также с целью некоторого снижения крупности готового продукта звездочки устанавливают в окружном направлении равномерно смещенными относительно друг друга [8] на угол φ_i ($i = 3, 4, \dots, 10$). Тогда

$$\begin{aligned} M_1(t) &= M_1(t), \\ M_2(t) &= M_2(t + \varphi_2), \\ M_3(t) &= M_2(t + \varphi_3), \\ &\dots, \\ M_{10}(t) &= M_2(t + \varphi_{10}). \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, полученная многомассная математическая модель динамики работы одновалковой зубчатой дробилки создает возможность анализа динамики её работы на основе учета действия сил, оказывающих влияние на рабочие органы, подвергающиеся воздействию рабочих нагрузок. Это может использоваться при совершенствовании и модернизации конструкции с целью повышения её эффективности работы.

Так как анализ многомассной модели сопряжен с чрезмерной трудоемкостью её решения, то целесообразно рассмотрение двумассной динамической модели машины, где приведенная масса характеризует дробящие звездочки (рис. 3).

Математическое описание движения масс будет дано в следующем виде:

$$\begin{aligned} I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 &= M_1 - M_0, \\ I \cdot \ddot{\varphi}_2 &= M_0 - M, \end{aligned} \quad (14)$$

где I_1 — момент инерции ротора электродвигателя; I — момент инерции узла вала; C — жесткость, определяющая упругие свойства редуктора в динамических расчетах; M_0 — момент, возникающий из-за упругости соединения масс; φ_i — угловое положение i -той массы при повороте; M — реакционный момент от действия аглопи-рога; M_1 — крутящий момент асинхронного двигателя, который рассчитывается по формуле

$$M_1 = M_n \cdot \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 - \omega_n}, \quad (15)$$

где M_n — номинальный крутящий момент; ω_0 — синхронная угловая скорость магнитного поля электродвигателя; ω_n — за-явленная угловая скорость якоря двигателя.

$$M_0 = C \cdot (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (16)$$

В данном случае

$$\omega(t) = \dot{\varphi}_1(t). \quad (17)$$

МАШИНОСТРОЕНИЕ

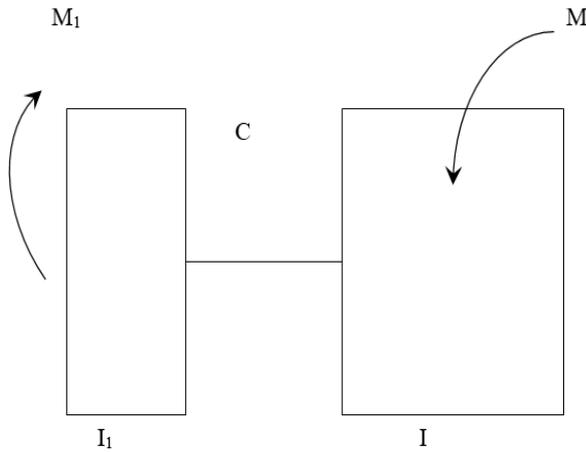


Рисунок 3 — Двумассная модель однозубчатой зубчатой дроби

Тогда соотношения (14) и (16) с применением формулы (15) включает три уравнения с тремя неизвестными φ_1 , φ_2 , M_0 преобразуются таким образом:

$$\begin{cases} I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 = M_H \cdot \frac{\dot{\omega}_0 - \dot{\varphi}_1}{\omega_0 - \omega_H} - M_0, \\ I \cdot \ddot{\varphi}_2 = M_0 - M. \end{cases} \quad (18)$$

Исключим из уравнений (18) и (16) неизвестные $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, разделив первое уравнение (18) на I_1 , второе — на I , а потом отняв из полученного первого уравнения второе, и результат умножим на C , а затем продифференцируем:

$$C \cdot (\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) = -\frac{M_H \cdot C \cdot \dot{\varphi}_1}{(\omega_0 - \omega_H) \cdot I_1} - \left(-\frac{\dot{M}_0}{I_1} \cdot C - \frac{\dot{M}_0}{I} \cdot C + \frac{\dot{M}}{I} \cdot C \right).$$

Иначе

$$\ddot{M}_0 + \beta_0^2 \cdot \dot{M}_0 = C \cdot \frac{\dot{M}}{I} - C \cdot \frac{M_H \cdot \dot{\varphi}_1}{I_1 \cdot (\omega_0 - \omega_H)},$$

где β_0 — собственная циклическая частота колебательных движений двумассной системы:

$$\beta_0 = \sqrt{C \cdot \frac{I_1 + I}{I_1 I}}.$$

Для дальнейшего решения к правому соотношению добавим и вычтем

$$\frac{M_H \cdot C}{I_1 \cdot (\omega_0 - \omega_H)} \cdot \ddot{\varphi}_2. \text{ А с учетом того, что } \ddot{\varphi}_2 = \frac{M_0 - M}{I}, \text{ будем иметь:}$$

$$\begin{aligned} \ddot{M}_0 + \frac{M_H \cdot \ddot{M}_0}{I_1 \cdot (\omega_0 - \omega_H)} + \beta_0^2 \cdot \dot{M}_0 + \frac{\beta_0^2 \cdot M_H \cdot M_0}{(I_1 + I_2) \cdot (\omega_0 - \omega_H)} = \\ = C \cdot \frac{\dot{M}}{I} + \frac{\beta_0^2 \cdot M_H \cdot M}{(I_1 + I) \cdot (\omega_0 - \omega_H)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Приняв $T = \frac{I_1 + I}{\gamma}$ и $m = \frac{I_1}{I_1 + I}$, уравнение (19) представим в виде

$$\begin{aligned} \ddot{M}_0 + \frac{\ddot{M}_0}{mT} + \beta_0^2 \cdot \dot{M}_0 + \frac{\beta_0^2 \cdot M_0}{T} = \frac{M \cdot C}{I} + \frac{\beta_0^2 \cdot M}{T}. \end{aligned} \quad (20)$$

Общее решение дифференциального уравнения (20) запишем в виде

$$M_0(t) = M_{01}(t) + M_{02}(t), \quad (21)$$

где M_{01} — общее решение однородного уравнения (22):

$$\ddot{M}_{01} + \frac{\ddot{M}_{01}}{m \cdot t} + \beta_0^2 \cdot \dot{M}_{01} + \frac{\beta_0^2 \cdot M_{01}}{T} = 0; \quad (22)$$

$M_{02}(t)$ — частное решение неоднородного уравнения (20).

Функцию $M_{01}(t)$ найдем в виде

$$M_{01}(t) = A \cdot e^{kt}, \quad (23)$$

где k — корень характеристического уравнения

МАШИНОСТРОЕНИЕ

$$F(k) \equiv k^3 + \frac{k^2}{m \cdot T} + \beta_0^2 \cdot k + \frac{\beta_0^2}{T} = 0 \quad (24)$$

или же

$$F(k) \equiv k^3 + \frac{\gamma \cdot k^2}{I_1} + \beta_0^2 \cdot k + \frac{\gamma \cdot \beta_0^2}{I_0} = 0, \quad (25)$$

где $I_0 = I_1 + I$.

Далее вычислим [9]

$$F \cdot \left(-\frac{\gamma}{I_1} \right) = -\frac{\beta_0^2 \cdot \gamma \cdot I}{I_0 \cdot I_1} < 0;$$

$$F \cdot \left(-\frac{\gamma}{I_1} \right) = \frac{\gamma^3 \cdot I}{I_1 \cdot I_0^2} > 0.$$

Таким образом, отрицательный корень уравнения (23) находится на интервале $\left[-\frac{\gamma}{I_1}, -\frac{\gamma}{I_0} \right]$.

Так как в одновалковой зубчатой дробилке $I \gg I_1$, то имеет место неравенство

$$\frac{\gamma^2}{(I_1 + I)^2 \cdot \beta_0^2} = \frac{\gamma^2 \cdot I_1 \cdot I}{C \cdot (I_1 + I)^3} \ll 1.$$

Согласно [5] корни k определяются приблизительно по формулам

$$k_1 = -\frac{\gamma}{I_1 + I},$$

$$k_{2,3} = \alpha \pm i \cdot \beta = -\frac{\gamma \cdot I}{2 \cdot I_1 \cdot I_0} \pm \pm i \cdot \sqrt{\beta_0^2 - \left(\frac{\gamma}{I_1} \right)^2 \cdot \frac{I}{I_0} + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\gamma \cdot I}{I_1 \cdot I_0} \right)^2}.$$

Откуда

$$M_{01}(t) = A_1 \cdot e^{-\frac{\gamma}{I_1+I} \cdot t} + e^{\alpha \cdot t} (A_2 \cdot \cos \beta \cdot t + A_3 \cdot \sin \beta \cdot t), \quad (26)$$

где A_1, A_2, A_3 — постоянные величины, зависящие от начальных условий при $t = 0$.

Найдём частное решение M_{02} уравнения (16), которое отвечает периодической нагрузке

$$M_{02}(t) = \sum M_{rk}(t),$$

где M_{rk} — частное решение, когда в качестве $M(t)$ выбирают

$$\begin{cases} M(t) = b_k \cdot \sin P_k \cdot t, \\ P_k = \frac{k \cdot \pi}{l}, \\ l = \frac{\pi}{240}; \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \overset{\dots}{M}_{rk} + \frac{1}{m \cdot T} \overset{\dots}{M}_{rk} + \beta_0^2 \cdot M_{rk} + \frac{\beta_0^2 \cdot M_{rk}}{T} = \\ = b_k \cdot \left(\frac{C}{I} \cdot P_k \cdot \cos P_k \cdot t + \frac{\beta_0^2}{T} \cdot \sin P_k \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Решение (28) ищем в виде

$$M_{r.k}(t) = B_k \cdot \cos P_k \cdot t + C_k \cdot \sin P_k \cdot t. \quad (29)$$

Вычислим производные от функции (28):

$$\overset{\cdot}{M}_{rk} = -P_k B_k \sin P_k t + P_k C_k \cos P_k t,$$

$$\overset{\ddot{\cdot}}{M}_{rk} = -P_k^2 B_k \cos P_k t - P_k^2 C_k \sin P_k t,$$

$$\overset{\dots}{M}_{rk} = P_k^3 B_k \sin P_k t - P_k^3 C_k \cos P_k t.$$

Подставим полученные выражения в формулу (28):

$$\begin{aligned} B_k \cdot P_k^3 \cdot \sin P_k \cdot t - C_k \cdot P_k^3 \cdot \cos P_k \cdot t + \frac{1}{m \cdot T} \times \\ \times (-B_k \cdot P_k^2 \cdot \cos P_k \cdot t - C_k \cdot P_k^2 \cdot \sin P_k \cdot t) + \\ \beta_0^2 \cdot (-B_k \cdot P_k \cdot \sin P_k \cdot t + C_k \cdot P_k \cdot \cos P_k \cdot t) + \\ + \frac{\beta_0^2}{T} \cdot (B_k \cdot \cos P_k \cdot t + C_k \cdot \sin P_k \cdot t) = \\ = b_k \cdot \left(\frac{C}{I} \cdot P_k \cos P_k \cdot t + \frac{\beta_0^2}{T} \cdot \sin P_k \cdot t \right). \end{aligned} \quad (30)$$

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Приравняем в уравнении (30) коэффициенты при $\sin P_k \cdot t$ и $\cos P_k \cdot t$ соответственно, получим выражение

$$\begin{cases} B_k P_k^3 - \frac{C_k P_k^2}{mT} - B_k P_k \beta_0^2 + \frac{\beta_0^2}{T} C_k = b_k \frac{\beta_0^2}{T}, \\ -C_k P_k^3 - B_k \frac{P_k^2}{mT} + C_k P_k \beta_0^2 + \frac{\beta_0^2}{T} B_k = b_k \frac{C}{I} P_k \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} B_k \left(P_k^3 - P_k \beta_0^2 \right) + C_k \left(\frac{\beta_0^2}{T} - \frac{P_k^2}{mT} \right) = b_k \frac{\beta_0^2}{T}, \\ B_k \left(\frac{\beta_0^2}{T} - \frac{P_k^2}{mT} \right) + C_k \left(P_k \beta_0^2 - P_k^3 \right) = b_k \frac{C}{I} P_k, \end{cases} \quad (31)$$

откуда

$$\begin{cases} B_k = b_k \cdot \frac{\Delta_B}{\Delta}, \\ C_k = b_k \cdot \frac{\Delta_C}{\Delta}, \end{cases} \quad (32)$$

где

$$\begin{cases} \Delta = \left(P_k^3 - P_k \beta_0^2 \right)^2 - \left(\frac{\beta_0^2}{T} - \frac{P_k^2}{mT} \right)^2, \\ \Delta_B = \frac{P_k}{T} \left[\beta_0^2 \left(\beta_0^2 - P_k^2 \right) - \frac{C}{I} \left(\beta_0^2 - \frac{P_k^2}{m} \right) \right], \\ \Delta_C = \frac{C}{I} P_k \left(P_k^3 - P_k \beta_0^2 \right) - \frac{\beta_0^2}{T^2} \left(\beta_0^2 - \frac{P_k^2}{m} \right). \end{cases}$$

В результате будем иметь

$$\begin{aligned} M_{rk}(t) &= \sqrt{B_k^2 + C_k^2} \times \\ &\times \left(\frac{B_k \cdot \cos P_k \cdot t}{\sqrt{B_k^2 + C_k^2}} + \frac{C_k \cdot \sin P_k \cdot t}{\sqrt{B_k^2 + C_k^2}} \right) = \\ &= \sqrt{B_k^2 + C_k^2} \cdot \sin(P_k \cdot t + \psi_k). \end{aligned}$$

Здесь

$$\psi_k = \arcsin \left(\frac{B_k}{\sqrt{B_k^2 + C_k^2}} \right).$$

Окончательно

$$M_{rk}(t) = b_k \cdot D_k \cdot \sin(P_k \cdot t + \psi_k), \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} D_k &= \frac{\sqrt{\Delta_B^2 + \Delta_C^2}}{\Delta}, \\ \psi_k &= \arcsin \left(\frac{\Delta_B}{\sqrt{\Delta_B^2 + \Delta_C^2}} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом,

$$M_{02}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot D_k \cdot \sin(P_k \cdot t + \psi_k). \quad (35)$$

Общее решение исходной задачи представим так:

$$\begin{aligned} M_0(t) &= A_1 \cdot e^{-\frac{\gamma \cdot t}{I_1 + I}} + \\ &+ e^{\alpha \cdot t} \left(A_2 \cdot \cos \beta \cdot t + A_3 \cdot \sin \beta \cdot t \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot D_k \cdot \sin(P_k t + \varphi_k). \end{aligned} \quad (36)$$

Из зависимостей (36) и (35) следует, что при $\Delta = 0$ величина D_k будет бесконечно возрастать, что соответствует наступлению резонанса. Следовательно, для недопущения негативного влияния резонансных явлений частоты вращения узла ротора дробилки необходимо условие $\Delta \neq 0$:

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(P_k^3 - P_k \cdot \beta_0^2 \right)^2 - \\ &- \left(\frac{\beta_0^2}{T} - \frac{P_k^2}{m \cdot T} \right)^2 \neq 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Показатель (37) $\eta = |D_k|$ используется в качестве коэффициента динамичности одновалковой зубчатой дробилки и характеризует её амплитудно-частотную характеристику, где ψ_k выступает в виде её фазово-частотных характеристик.

Разработанные много- и двумассная модели могут служить для учета динамических процессов, происходящих в меха-

нической системе одновалковой зубчатой дробилки.

Результаты выполненной работы позволили сделать следующие **выводы**:

1. Аналитическим путем получены математические зависимости, описывающие динамику работы одновалковой зубчатой дробилки в виде много- и двумасной моделей.

2. Многомассная модель, наиболее точно отражающая поведение механической части дробилки, описывается системой уравнений, содержащей девять неоднородных дифференциальных уравнений и девять неизвестных, к которым относятся крутящие моменты M_{12} , M_{23} , M_{34} , ..., M_{89} , $M_{9,10}$, что существенно усложняет работу по её численному решению.

3. Двумасная модель одновалковой зубчатой дробилки, хоть и не обладает такой точностью, как многомассная, однако легко поддается численному решению, что позволяет выполнить оценку сил, действующих на рабочие органы машины.

4. Для исключения вредного влияния резонанса при вращении ротора дробилки может служить коэффициент динамичности машинного агрегата Δ , т. е. её амплитудно-частотная характеристика, когда ротор должен вращаться с такой частотой, чтобы $\Delta \neq 0$.

Дальнейшие исследования будут направлены на выполнение численных расчетов динамических параметров с учетом полученных математических моделей.

Список источников

1. Мороз В. В., Левченко Э. П., Левченко О. А. Перспективы повышения эффективности доменной плавки путем стабилизации фракционного состава дробленого агломерата // Современная наука: исследования, технологии, проекты : сборник V международной научно-практической конференции. М. : Научный центр «Олимп», 2015. С. 484–489. EDN UXYLXN
2. Левченко О. А., Левченко Э. П., Зинченко А. М. Состояние и основные направления развития технического уровня конструкций одновалковых зубчатых дробилок // Metallургические процессы и оборудование. 2011. № 1 (23). С. 24–29. EDN NDSAUZ
3. Перспективы улучшения фракционного состава доменного агломерата / В. В. Мороз [и др.] // Новые материалы и перспективные технологии : Четвертый междисциплинарный научный форум с международным участием. М. : ООО «Буки Веди», 2018. С. 626–630. EDN DGXRMZ
4. Левченко О. А. Комплексные направления повышения качества агломерата и защиты природной среды // Экология и промышленность России. 2006. № 1. С. 27–29.
5. Мороз В. В., Левченко Э. П., Бондарь Н. А. Способ многостадийной обработки агломерата в одновалковой зубчатой дробилке // Современная металлургия нового тысячелетия : сборник научных трудов II международной научно-практической конференции. Липецк : Липецкий государственный технический университет, 2016. С. 271–275. EDN XFTTQH
6. Иванченко Ф. К., Красношакпа В. А. Прикладные задачи динамики машин. К. : Вища шк. Головное изд-во, 1983. 200 с.
7. Рубежанский В. И. Специальные главы теоретической механики: малые колебания систем : учебное пособие. Алчевск : ФГБОУ ВО «ДонГТУ», 2024. 73 с. EDN ZBQXUP
8. Мороз В. В., Рубежанский В. И., Левченко Э. П. Анализ обеспечения возможностей организации многостадийной работы одновалковой зубчатой дробилки // Сборник научных трудов ДонГТУ. 2017. № 7 (50). С. 153–158. EDN TCVLXD
9. Кожевников С. Н. Динамика машин с упругими звеньями. К. : изд-во акад. наук УССР, 1961. 160 с.

© Левченко О. А., Зинченко А. М., Левченко М. Э., Левченко Э. П., 2025

© Павленко А. Т., 2025

Рекомендована к печати д.т.н., проф. каф. ТМиИК ЛГУ им. В. Даля Витренко В. А., к.т.н., доц. каф. ГТиБП ДонГТУ Смекалиным Е. С.

Статья поступила в редакцию 30.04.2025.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Левченко Оксана Александровна, канд. техн. наук, доцент каф. технологии и организации машиностроительного производства
Донбасский государственный технический университет,
г. Алчевск, Россия, e-mail: oksamito@rambltr.ru

Зинченко Андрей Михайлович, канд. экон. наук, доцент, зав. каф. технологии и организации машиностроительного производства
Донбасский государственный технический университет,
г. Алчевск, Россия

Павленко Александр Тимофеевич, канд. техн. наук, доцент, зам. директора института гражданской защиты
Луганский государственный университет им. В. Даля,
г. Луганск, Россия

Левченко Максим Эдуардович, студент гр. ММК-21з каф. машин металлургического комплекса
Донбасский государственный технический университет,
г. Алчевск, Россия

Левченко Эдуард Петрович, канд. техн. наук, доцент, доц. каф. технологии и организации машиностроительного производства
Донбасский государственный технический университет,
г. Алчевск, Россия

***Levchenko O. A., Zinchenko A. M.** (Donbass State Technical University, Alchevsk, Russia, *e-mail: oksamito@rambltr.ru), **Pavlenko A. T.** (Lugansk State University named after V. Dahl, Lugansk, Russia), **Levchenko M. E., Levchenko E. P.** (Donbass State Technical University, Alchevsk, Russia)

MODELLING THE DYNAMICS OF A SINGLE-ROLL TOOTHED CRUSHER

This study focuses on developing a mathematical model to describe the dynamics of a single-roll toothed crusher. Multi-mass and two-mass mathematical models are considered, which enable the resonance-free machine operation to be estimated based on the dynamic's coefficient of the machine assembly.

Key words: single-roll toothed crusher, dynamics, multi-mass model, two-mass model, resonance, dynamic's coefficient of the machine assembly.

References

1. Moroz V. V., Levchenko E. P., Levchenko O. A. Prospects for improving blast-furnace smelting efficiency by stabilizing the fractional composition of crushed sinter [Perspektivy povysheniya effektivnosti domennoj plavki putem stabilizacii frakcionnogo sostava droblenogo aglomerata]. *Sovremennaya nauka: issledovaniya, tekhnologii, proekty : sbornik V mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii*. M. : Nauchnyj centr "Olimp", 2015. Pp. 484–489. EDN UXYLXN
2. Levchenko O. A., Levchenko E. P., Zinchenko A. M. State and main directions for the development technical level of a single-roll toothed crusher designs [Sostoyanie i osnovnye napravleniya razvitiya tekhnicheskogo urovnya konstrukcij odnovalkovykh zubchatykh drobilok]. *Metallurgicheskie processy i oborudovanie*. 2011. No. 1 (23). Pp. 24–29. EDN NDSAUZ
3. Moroz V. V. [et al.]. Prospects for the improvement fractional composition of blast-furnace sinter [Perspektivy uluchsheniya frakcionnogo sostava domennogo aglomerata]. *New materials and*

promising technologies : Fourth interdisciplinary scientific forum with international participation. M. : ООО «Buki Vedi», 2018. Pp. 626–630. EDN DGXRMZ

4. Levchenko O. A. *Integrated directions for improving sinter quality while protecting the natural environment [Kompleksnye napravleniya povysheniya kachestva aglomerata i zashchity prirodnoj sredy]. Ekologia i promyshlennost Rossii. 2006. No. 1. Pp. 27–29.*

5. Moroz V. V., Levchenko E. P., Bondar N. A. *Method of multistage sinter processing in a single-roll toothed crusher [Sposob mnogostadijnoj obrabotki aglomerata v odnovalkovej zubchatoj drobilke]. Sovremennaya metallurgiya novogo tysyachiletija : sbornik nauchnyh trudov II mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii. Lipetsk : Lipetsk State Technical University, 2016. Pp. 271–275. EDN XFTTQH*

6. Ivanchenko F. K., Krasnoshapka V. A. *Applied problems in machine dynamics [Prikladnye zadachi dinamiki mashin]. K. : Vishcha shk. Golovnoe izd-vo, 1983. 200 p.*

7. Rubezhanskiy V. I. *Special chapters of theoretical mechanics: small oscillations of systems : textbook [Special'nye glavy teoreticheskoy mekhaniki: malye kolebaniya sistem : uchebnoe posobie]. Alchevsk : Donbass State Technical University, 2024. 73 p. EDN ZBQXUP*

8. Moroz V. V., Rubezhanskiy V. I., Levchenko E. P. *Analyzing organizational capabilities of multistage operation of single-roll toothed crusher [Analiz obespecheniya vozmozhnostej organizacii mnogostadijnoj raboty odnovalkovej zubchatoj drobilki]. Collection of Scientific Papers of DonSTU. 2017. No. 7 (50). Pp. 153–158. EDN TCVLXD*

9. Kozhevnikov S. N. *Dynamics of machines with elastic links [Dinamika mashin s uprugimi zven'yami]. K. : Izd-vo akad. nauk USSR, 1961. 160 p.*

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Levchenko Oksana Aleksandrovna, PhD in Engineering, Associate Professor, Assistant Professor of the Department of Technology and Organization of Machine-building Engineering
Donbass State Technical University,
Alchevsk, Russia, e-mail: oksamito@rambltr.ru

Zinchenko Andrey Mikhailovich, Assistant Professor, Head of the Department of Technology and Organization of Machine-building Engineering
Donbass State Technical University,
Alchevsk, Russia

Pavlenko Aleksandr Timofeevich, Assistant Professor, Deputy Director of the Institute of Civil Defense
Lugansk State University named after V. Dahl,
Lugansk, Russia

Levchenko Maxim Eduardovich, Student of the group MCM-21ems, Department of Metallurgical Complex Machine
Donbass State Technical University,
Alchevsk, Russia

Levchenko Eduard Petrovich, PhD in Engineering, Associate Professor, Assistant Professor of the Department of Technology and Organization of Machine-building Engineering
Donbass State Technical University,
Alchevsk, Russia