

УДК 681.51

к.т.н. Зотов В. А.  
(ДонГТУ, г. Алчевск, ЛНР)

## МЕТОДИКА АНАЛИТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА РЕАКЦИЙ СИСТЕМ С ТРАНСПОРТНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Предложена методика расчета переходных процессов в динамических системах, обладающих большим транспортным запаздыванием. Приведен алгоритм вычисления реакций систем, объекты которых аппроксимируются типовыми инерционными звеньями с запаздыванием.

**Ключевые слова:** динамическая система, инерционное звено, транспортное запаздывание, переходный процесс.

**Проблема и её связь с научными и практическими задачами.** При решении задач анализа переходных процессов в динамических системах большое количество объектов приходится аппроксимировать передаточными функциями вида

$$W(p) = \frac{e^{-\tau p}}{Tp}; \quad W(p) = \frac{ke^{-\tau p}}{Tp+1};$$

$$W(p) = \frac{ke^{-\tau p}}{(T_1p+1)(T_2p+1)};$$

$$W(p) = \frac{ke^{-\tau p}}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1},$$

где  $T$  – постоянная времени объекта;  $k$  – коэффициент усиления объекта;  $\tau$  – чистое запаздывание;  $\xi$  – коэффициент демпфирования;  $p$  – оператор Лапласа.

Указанными зависимостями описываются, в частности, процессы конвейерной транспортировки грузов, флотации, сушки, обезвоживания в вакуумных фильтрах, проветривания горных выработок и т. п.

Аналитическое вычисление переходных процессов, вызванных типовыми задающими воздействиями, реакций для систем с такими объектами затруднено ввиду наличия запаздывания. Особенно выделяются задачи, в которых запаздывание соизмеримо по величине с постоянной времени, или в несколько раз больше последней.

Решение таких задач методами теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом [1] не обеспечивает удовлетворительной точности, так как эти

методы разработаны для использования при малом отклонении аргумента. При соотношении запаздывания и постоянной времени  $\tau/T \geq 0,5$  практическое применение этих методов, как правило, невозможно.

Поэтому реакцию динамической системы с запаздыванием (рисунок 1) часто определяют, представив звено запаздывания в виде непрерывной эквивалентной функции. Это может быть ряд Падэ, Тейлора или цепь последовательно включенных апериодических звеньев. При этом, естественно, решение задачи можно получить лишь с некоторым приближением. Кроме того, для получения большей точности решения приходится увеличивать количество составляющих эквивалентной функции, что влечет за собой увеличение порядка дифференциального уравнения системы и существенно усложняет решение последнего. Если запаздывание соизмеримо с постоянными времени, то приемлемую точность можно получить только численными методами с применением компьютерной техники.

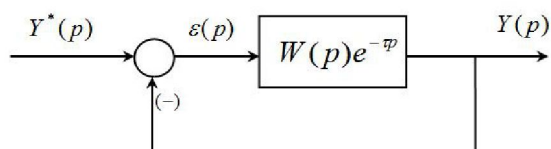


Рисунок 1 Исходная система

Наиболее естественным точным методом решения этой задачи является метод последовательного интегрирования (метод шагов), заключающийся в том, что непрерывное ре-

шение рассматриваемой задачи определяется из уравнения без запаздывания [2]. При этом отрезок, на котором требуется найти решение, разбивается на промежутки, равные величине чистого запаздывания. Внутри каждого промежутка определяется свое решение. В этом случае возникают сложности с составлением и решением дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы на каждом промежутке.

**Постановка задачи.** Задачей данной работы является модификация методики аналитического вычисления реакций систем с транспортным запаздыванием, обеспечивающей точность при  $\tau / T \geq 0,5$ , на основе метода последовательного интегрирования без составления дифференциальных уравнений.

**Изложение материала и его результаты.** При определенных условиях можно принять допущения, что параметры системы являются постоянными во времени. Тогда для вычисления реакции системы предлагается использовать следующую модификацию метода последовательного интегрирования.

Отрезок времени, на котором требуется найти решение, разбивается на промежутки длительностью  $\tau$ . Система рассматривается в разомкнутом виде без запаздывания. Для этого передаточная функция разомкнутой части системы разделяется на две части, включенные последовательно, одной из которых является звено чистого запаздывания. Затем звено запаздывания и обратная связь из структурной схемы системы исключаются (рисунок 2).

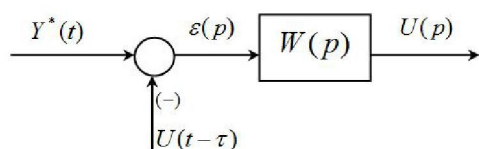


Рисунок 2 Скорректированная система

В дальнейших расчетах участвуют только выходная координата разомкнутой части без запаздывания  $U(t)$ , управляющее

воздействие  $Y^*(t)$ , рассогласование  $\varepsilon(t)$  и передаточная функция разомкнутой части без запаздывания  $W(p)$ . Вместо сигнала обратной связи используется зависимость  $U(t)$ , сдвинутая влево по оси времени на величину запаздывания  $U(t-\tau)$ . Входным воздействием разомкнутой части системы на  $n$ -м промежутке  $\varepsilon(t)_n$  считается разность между управляющим воздействием  $Y^*(t)_n$  и выходной координатой разомкнутой части без запаздывания на  $n-1$  промежутке  $U(t)_{n-1}$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t)_n &= Y^*(t) - U(t-\tau) = \\ &= Y^*(t)_n - U(t)_{n-1}. \end{aligned} \quad (1)$$

В этом случае изображение по Лапласу выходной координаты

$$U(p)_n = \frac{U(\tau)_{n-1}}{p} + L[Y^*(t)_n - U(t)_{n-1}] \cdot W(p), \quad (2)$$

где  $U(\tau)_{n-1}$  – ордината переходного процесса в конце  $n-1$  промежутка.

Искомая реакция системы получается простым смещением вправо по оси времени на величину запаздывания оригинала выходной координаты разомкнутой части без запаздывания.

Слагаемое  $U(\tau)_{n-1} / p$  образовано следующим образом. Решение на  $n$ -м промежутке представляет собой сумму свободной и вынужденной составляющих переходного процесса. Свободная составляющая является обратным преобразованием Лапласа изображения решения на данном промежутке. Вынужденная составляющая есть численное значение ординаты переходного процесса в конце  $n-1$  промежутка  $U(\tau)_{n-1}$ , изображение по Лапласу которой

$$U(\tau)_{n-1} \longrightarrow \frac{U(\tau)_{n-1}}{p}.$$

Определяя реакцию системы (рис. 1) на управляющее воздействие  $Y^*(t)$  при нулевых начальных условиях, заметим, что на первом промежутке времени  $[0; \tau]$  звено

запаздывания сигнал не выдает, значит, реакция системы на этом промежутке

$$Y(t)_1 = 0.$$

При этом рассогласование равно управляющему воздействию:

$$\varepsilon(t) = Y^*(t).$$

Следовательно, реакция системы на данном промежутке

$$U(p)_1 = Y^*(p)_1 \cdot W(p) \longrightarrow U(t)_1.$$

В течение второго промежутка времени  $[\tau; 2\tau]$  на выходе звена запаздывания присутствует сигнал, являющийся искомой реакцией на этом промежутке, полностью аналогичный сигналу на входе звена на предыдущем промежутке времени (для упрощения принято, что время внутри каждого промежутка находится в пределах от 0 до  $\tau$ , т. е. отсчет времени производится заново).

$$Y(t)_2 = U(t)_1.$$

При этом эквивалентная структурная схема представляется в виде, показанном на рисунке 2. Рассогласование  $\varepsilon(t)_2$  в этом случае равно разности управляющего воздействия на текущем промежутке времени и сигнала на входе звена запаздывания на предыдущем промежутке:

$$\varepsilon(t)_2 = Y^*(t)_2 - U(t)_1,$$

следовательно

$$U(p)_2 = \frac{U(\tau)_1}{p} + L[Y^*(t)_2 - U(t)_1] \cdot W(p) \longrightarrow U(t)_2.$$

Аналогично определяется решение для последующих промежутков времени.

Заметим, что чем больше запаздывание относительно постоянных времени, тем больше информации о ходе переходного процесса содержится в решении для одного  $n$ -го промежутка, следовательно уменьшается трудоемкость решения – значит, метод эффективен только для анализа систем с большим запаздыванием.

Определим реакцию системы с объектом

$$W(p) = \frac{e^{-\tau p}}{Tp}$$

на управляющее воздействие в виде единичной ступенчатой функции при нулевых начальных условиях.

Рассмотрим первый промежуток  $[0; \tau]$ . В соответствии с (1), рассогласование на данном промежутке равно управляющему воздействию:

$$\varepsilon(t)_1 = Y^*(t);$$

$$\varepsilon(p)_1 = \frac{1}{p}.$$

Изображение по Лапласу реакции системы

$$U(p)_1 = \varepsilon(p)_1 W(p) = \frac{1}{p^2}.$$

Оригинал искомой функции получим, используя обратное преобразование Лапласа  $U(t)_1 = t$ .

Определим ординату переходного процесса в конце первого промежутка, необходимую для дальнейших расчетов  $U(\tau)_1 = \tau$ .

Рассматривая решение на втором промежутке  $[\tau; 2\tau]$ , для определения рассогласования используем уже известную реакцию системы на первом промежутке:

$$\varepsilon(t)_2 = Y^*(t)_2 - U(t)_1 = 1 - t;$$

$$\varepsilon(p)_2 = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}.$$

В соответствии с (2), реакция системы на втором промежутке

$$U(p)_2 = \frac{U(\tau)_1}{p} + \varepsilon(p)_2 W(p) = \frac{\tau}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3};$$

$$U(t)_2 = \tau + t - \frac{t^2}{2};$$

$$U(\tau)_2 = 2\tau - \frac{\tau^2}{2}.$$

Аналогично определим реакцию системы на третьем промежутке:

$$\varepsilon(t)_3 = 1 - \tau - t + \frac{t^2}{2};$$

$$\varepsilon(p)_3 = \frac{1-\tau}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3};$$

$$U(p)_3 = \frac{U(\tau)_2}{p} + \varepsilon(p)_3 W(p) =$$

$$= \frac{2\tau - \frac{\tau^2}{2}}{p} + \frac{1-\tau}{p^2} + \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^4};$$

$$U(t)_3 = 2\tau - \frac{\tau^2}{2} + (1-\tau)t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}.$$

Таким образом, можно сравнительно просто получить решение для  $n$ -го промежутка. Для сравнения на рисунке 3 показаны реакции данной системы, рассчитанные различными методами при  $\tau = 3$ .

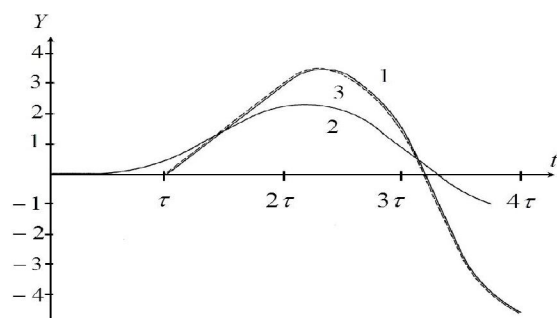


Рисунок 3 Реакции, рассчитанные различными методами

### Библиографический список

1. Норкин, С. Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом [Текст] / С. Б. Норкин. — М. : Наука, 1965. — 354 с.
2. Эльсгольц, Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом [Текст] / Л. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин. — М. : Наука, 1971. — 296 с.
3. Основы теории автоматического регулирования и управления [Текст] / А. А. Воронов и др. — М. : Высшая школа, 1977. — 519 с.

© Зотов В. А.

Рекомендована к печати д.т.н., проф., зав. каф. ГЭиО ДонГТУ Корнеевым С. В., к.т.н., доц. СУНИГОТ Петровым А. Г.

Статья поступила в редакцию 18.10.16.

**к.т.н. Зотов В. О.** (ДонДТУ, м. Алчевськ, ЛНР)

**МЕТОДИКА АНАЛІТИЧНОГО РОЗРАХУНКУ РЕАКЦІЙ СИСТЕМ З ТРАНСПОРТНИМ ЗАПІЗНЮВАННЯМ**

*Запропоновано методику розрахунку перехідних процесів у динамічних системах з великим транспортним запізнюванням. Наведено алгоритм обчислення реакцій систем, об'єкти яких апроксимуються типовими інерційними ланками із запізнюванням.*

**Ключові слова:** динамічна система, інерційна ланка, транспортне запізнювання, перехідний процес.

**PhD Zotov V. A.** (DonSTU, Alchevsk, LPR)

**THE TECHNIQUE OF ANALYTICAL CALCULATION FOR REACTIONS OF SYSTEMS WITH TRANSPORTATION LAG**

*A calculation method for transients in dynamical systems with a large transport lag is proposed. The calculations algorithm for systems reactions which objects are approximated by the model inertial links with lag are presented.*

**Key words:** dynamical system, inertial unit, transportation lag, transition process.