

УДК 622.831: 622.28:539.37

*проф. Литвинский Г. Г.
(ДонГТУ, г. Алчевск, ЛНР, ligag@ua.ru)*

ОБОСНОВАНИЕ МИНИМАЛЬНОГО ОТПОРА КРЕПИ В ГОРНОЙ ВЫРАБОТКЕ

На больших глубинах разработки вокруг выработок образуется зона запредельных деформаций (ЗЗД), от которой зависят особенности проявлений горного давления. Цель исследований – определить параметры крепи при учете веса пород в ЗЗД. Для оценки влияния основных неосесимметричных факторов использован метод малого параметра. Решена задача о форме и размерах ЗЗД при учете массовых сил. Показано, что ЗЗД конгруэнтно сдвигается вверх, а ее размеры зависят от отпора крепи. Впервые получены формулы для определения минимального отпора крепи и даны практические рекомендации по выбору ее параметров.

Ключевые слова: горная выработка, горное давление, зона запредельных деформаций, неосесимметричные факторы, метод малого параметра, массовые силы, распределение напряжений, минимальный отпор крепи, параметры разрушения пород.

Как показали многочисленные натурные наблюдения и экспериментальные исследования [1–3], на больших глубинах вокруг горных выработок горные породы разрушаются от сдвиговых деформаций и происходит образование зоны запредельных деформаций (ЗЗД), а устойчивость выработки зависит от особенностей взаимодействия системы "крепь–массив". Эта, ставшая уже классической, задача механики горных пород привлекала к себе внимание разных исследователей, что отражено во многих обзорах [4, 5 и др.]. Однако в подавляющем большинстве случаев решались осесимметричные задачи со значительно идеализированными предпосылками, положенными в основу расчетной схемы. Эти идеализации хотя и являются общепринятыми в подобного рода задачах [5, 6], заметно сужают область применения и делают менее достоверными расчетные методы. Поэтому возникает необходимость учета основных горно-технических факторов, что требует комплексного решения неосесимметричного класса задач механики горных пород.

Основная идея решения неосесимметричных задач в данной работе заключается в следующем. Исследуемый фактор вводился в порождающее решение с помощью малого параметра в виде ряда Фурье. Сперва рассматривалось статическое равновесие пла-

стической области вокруг отверстия и находилась функция напряжений в виде разложения по степеням малого параметра. Из граничных условий задачи определялись все коэффициенты бесконечных сумм, которые, как правило, оказывались комплексными. Затем задача сводилась к определению границы пластической области и двух функций Н. И. Мусхелишвили, голоморфных во всей плоскости вне границы и непрерывных вплоть до нее. Граничные значения этих функций определялись по функции напряжений в пластической области.

Конформно отображая внешность границы разрушения на внешность единичного круга с помощью функции, разложенной по степеням малого параметра, воспользовавшись значениями функции Н. И. Мусхелишвили на бесконечности и теоремой Ж. Лиувилля [7], определяли неизвестные коэффициенты и искомые функции, характеризующие форму упругопластической границы или зоны запредельных деформаций (ЗЗД) по горной терминологии.

При исследовании напряженно-деформированного состояния горных пород вокруг подземных выработок обычно горный массив заменяют невесомой средой, у которой на бесконечности заданы исходные усилия. Однако массовые силы в ЗЗД при значительном ее развитии вокруг горной

выработки начинают заметно влиять на форму упругопластической границы и распределение напряжений. Такая ситуация часто реализуется в подземных горных выработках [8], закрепленных крепью с недостаточным отпором, что приводит к недопустимо большим смещениям горных пород или к завалу выработки. Поэтому исследование влияния собственной массы среды на условия формирования пластической области вокруг отверстия представляет не только теоретический, но и практический интерес, важный с точки зрения приложений.

Определим в соответствии с принятой методикой форму упругопластической границы вокруг отверстия при учете сил гравитации (массовых сил). Расчетная схема задачи представлена на рисунке 1.

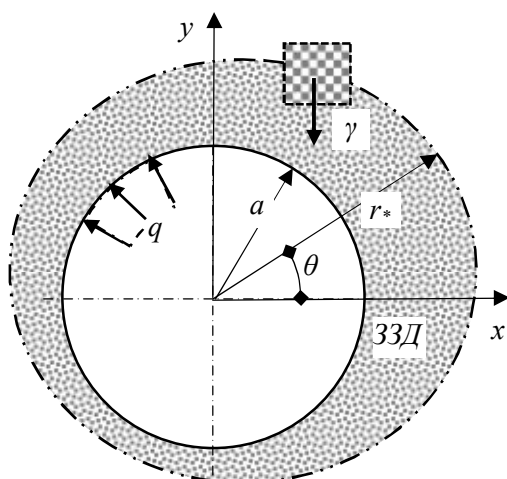


Рисунок 1 Расчетная схема несимметричной задачи по образованию вокруг выработки зоны запредельных деформаций

Для оценки влияния собственной массы среды достаточно учесть силы гравитации непосредственно в зоне запредельных деформаций, тогда как за ее пределами в упругой области можно рассматривать невесомую плоскость в силу пренебрежимо малыми напряжениями от массовых сил по сравнению с упругими. Поэтому решается упругопластическая задача о распределении напряжений в бесконечной плоскости, нагруженной гидростатическим полем на-

пряжений p и имеющей круглое отверстие единичного радиуса, подкрепленное по контуру $r=1$ давлением $\sigma_r = q$.

В пластической области уравнения равновесия, которым должны удовлетворять компоненты напряжений, запишем с учетом массовых сил (запятой обозначена операция дифференцирования):

$$\begin{aligned} \sigma_{r,r} + r^{-1} \tau_{r\theta,\theta} + r^{-1} (\sigma_r - \sigma_\theta) &= -\varepsilon \gamma \sin \theta; \\ \tau_{r\theta,r} + r^{-1} \sigma_{\theta,\theta} + 2r^{-1} \tau_{r\theta} &= -\varepsilon \gamma \cos \theta, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ — компоненты напряжений в полярной системе координат $r-\theta$;

ε — малый параметр;

γ — плотность материала.

В упругой области компоненты напряжений удовлетворяют условиям совместности, а в пластической — условию пластичности, в качестве которого принимается прямолинейная наклонная огибающая предельных кругов напряжений диаграммы Мора:

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = \sin^2 \rho (\sigma_\theta + \sigma_r + 2c)^2, \quad (2)$$

где ρ — угол внутреннего трения материала;

c — удельная сила сцепления, переменная в радиальном направлении в соответствии с поведением материала на ниспадающей ветви диаграммы $\sigma-\varepsilon$ при «мягком» режиме нагружения, $c = B\sigma_3$;

B — постоянная, определяется из граничных условий решения задачи;

σ_3 — минимальная нормальная компонента тензора напряжений $\sigma_3 = \sigma_r + O(\varepsilon^2)$.

Решение задачи проводим методом малого параметра [6], для чего компоненты напряжений ищем в виде разложения по степеням малого параметра ε :

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sigma_{ij}^{(k)}, \quad (i, j = r, \theta). \quad (3)$$

Подставив (3) в условие пластичности (2) и приравнявая члены с одинаковыми степенями малого параметра ε , получим условие пластичности для нулевой и первой степеней разложения:

$$\sigma_{\theta}^{(k)} - (\mu + 1)\sigma_r^{(k)} = 0, \quad (k = 0; 1), \quad (4)$$

где $\mu = (A - 1)(B + 1)$, $A = f(\rho)$ — постоянные.

Используя разложения (3) и (4), из (1) получим дифференциальные уравнения равновесия для дополнительных напряжений $\sigma_{ij}^{(1)}$, вызванных действием сил собственной массы среды:

$$\sigma_{\theta,r}^{(1)} + (\mu + 1)r^{-1}\tau_{r,\theta}^{(1)} - \mu r^{-1}\sigma_{\theta}^{(1)} = -\gamma(\mu + 1)\sin \theta, \quad (5)$$

$$\tau_{r,\theta}^{(1)} + r^{-1}\sigma_{\theta,\theta}^{(1)} + 2r^{-1}\tau_{r\theta}^{(1)} = -\gamma \cos \theta.$$

Решение уравнений (5) ищем с помощью функции напряжений U , через которую напряжения выражаются известными зависимостями:

$$\sigma_r^{(1)} = r^{-1}U_{,\theta\theta}; \quad \sigma_{\theta}^{(1)} = U_{,rr}; \quad (6)$$

$$\tau_{r\theta}^{(1)} = -\left(r^{-1}U_{,\theta}\right)_{,r}.$$

Подставляя (6) в (5), получим систему линейных неоднородных уравнений в частных производных третьего порядка:

$$rU_{,rrr} - (\mu + 1)\left(r^{-1}U_{,\theta\theta}\right)_{,r} - \mu U_{,rr} = -\gamma r(\mu + 1)\sin \theta; \quad (7)$$

$$r\left(r^{-1}U_{,\theta}\right)_{,rr} - r^{-1}(\mu + 1)\left(U_{,r\theta} + r^{-1}U_{,\theta\theta\theta}\right) + 2\left(r^{-1}U_{,\theta}\right)_{,r} = -\gamma r \cos \theta. \quad (8)$$

Решение уравнений (7) и (8) представим в виде суммы частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения. Частное решение для обоих уравнений ищем в виде:

$$U_i^{(1)} = m_i r^{ki} \sin \theta, \quad (i = 1, 2). \quad (9)$$

После непосредственной подстановки частного решения (9) в уравнения (7) и (8)

получим, соответственно, значения постоянных для уравнений (7) и (8):

$$m_1 = \gamma \frac{\mu + 1}{4\mu - 2}, \quad m_2 = 2m_1, \quad k_1 = k_2 = 3. \quad (10)$$

Таким образом, частные решения совпадают между собой с точностью до постоянного множителя, а при учете последующих приближений частные решения будут представлять собой функциональные ряды, сходящиеся к одной и той же функции напряжений. Однако, учитывая, что наибольший вклад в возмущение упругопластической границы вносят лишь первые члены ряда разложения по малому параметру, а последующие приближения только корректируют их, изучение исследуемой закономерности разумно ограничить уравнениями (7) и (8), применив к ним впоследствии принцип суперпозиции решений.

Общее решение однородных уравнений (7) и (8) ищем по методу Фурье, представив функцию напряжений в виде произведения $U = R(r)T(\theta)$.

В этом случае уравнение (7) распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$r^3 R''' - \mu r^2 R'' + CrR' - CR = 0; \quad (11)$$

$$(\mu + 1)T'' + CT = 0, \quad (12)$$

где $C \geq 0$ — постоянная, определяемая из граничных условий.

Решение уравнений (11) и (12) приводит к следующему выражению для функции напряжений с учетом частного решения (9):

$$U_1 = m_1 r^3 \sin \theta + (C_2 r^{\lambda_1} + C_2' r^{\lambda_2} + C_2'' r) (C_3 e^{in\theta} + C_3' e^{-in\theta}), \quad (13)$$

$$\text{где } n = [C(\mu + 1)^{-1}]^{0,5};$$

$$\lambda_{1,2} = 0,5(\mu + 2) \pm [0,25(\mu + 2)^2 - C]^{0,5};$$

$C_2, C_2', C_2'', C_3, C_3'$ — постоянные, определяемые из граничных условий.

Уравнение (13) должно в соответствии с постановкой задачи удовлетворять при $r = 1$ следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(1)} &= r^{-1}U_{1,r} + r^{-2}U_{1,\theta\theta} = 0; \\ \tau_{r\theta}^{(1)} &= (r^{-1}U_{1,\theta})_r = 0.\end{aligned}\quad (14)$$

После подстановки (13) в (14) получим значения искомым постоянных интегрирования:

$\lambda_2 = n = 1$; $\lambda_1 = C$; $C_2 = -2\mu^{-1}$; $\bar{C}_3 = 0,5m_1i^{-1}$, а C_2' , C_2'' — произвольны, поскольку они не влияют на распределение напряжений, полагаем $C_2' = C_2'' = 0$.

Функция напряжений с учетом нулевого и первого приближений приобретает следующий вид:

$$U_1 = U(0) + \varepsilon U_1^{(1)} = (\mu + 2)^{-1} gr^{\mu+2} + \varepsilon m_1 \sin \theta (r^3 - 2\mu^{-1}r^{\mu+1}) \quad (15)$$

Находим компоненты тензора напряжений в зоне запредельных деформаций, соответствующих найденной функции напряжений (15), которые удовлетворяют уравнениям системы (1):

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(0)} + \varepsilon \sigma_r^{(1)} &= gr^\mu + 2\varepsilon m_1 \sin \theta (r - r^{\mu-1}); \\ \sigma_\theta^{(0)} + \varepsilon \sigma_\theta^{(1)} &= (\mu + 1)gr^\mu + \\ &+ 2\varepsilon m_1 \sin \theta [3r - (\mu + 1)r^{\mu-1}]; \\ \tau_{r\theta}^{(0)} + \varepsilon \tau_{r\theta}^{(1)} &= -2\varepsilon m_1 \cos \theta (r - r^{\mu-1}).\end{aligned}\quad (16)$$

Следующий этап решения задачи сводится к определению формы упругопластической границы вокруг отверстия, исходя из сопряжения распределения напряжений в зоне запредельных деформаций, описываемого функцией напряжений (15), и упругого поля напряжений.

Решение задачи удобно вести с использованием функции комплексного переменного [7].

Найдем функции $\Omega^*(Z)$ и $\Phi^*(Z)$, голоморфные во всей плоскости вплоть до контура L , являющегося границей между пластической и упругой областями, и не-

прерывные вплоть до L . Для этого отразим внешность контура L плоскости Z на внешность единичного круга χ плоскости ζ с помощью функции $\omega(\zeta)$, разложенной в ряд по степеням малого параметра ε с сохранением членов нулевого и первого приближений:

$$\omega(\zeta) = D \left(\zeta + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^{-k} \right), \quad (17)$$

где D — размер невозмущенной границы пластической зоны;

k, α_k — параметры, характеризующие возмущающее воздействие сил гравитации на форму зоны запредельных деформаций.

Вводя обозначения

$$\Phi(\zeta) = \Phi^*[\omega(\zeta)], \quad \Omega(\zeta) = \Omega^*[\omega(\zeta)],$$

запишем граничные условия на L в удобном для дальнейших преобразований виде:

$$\begin{aligned}4 \operatorname{Re} \Phi(Z) &= (\mu + 2)g(\omega\bar{\omega})^{0,5\mu} + \\ &+ i\varepsilon m_1 \left[\left(\frac{\omega}{\bar{\omega}} \right)^{0,5} - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega} \right)^{0,5} \right] \times \\ &\times \left[4(\omega\bar{\omega})^{0,5} - (\mu + 2)(\omega\bar{\omega})^{0,5(\mu-1)} \right];\end{aligned}\quad (18)$$

$$\begin{aligned}2 \left(\frac{\omega}{\bar{\omega}} \right) \left[\frac{\bar{\omega}}{\omega} \Phi' + \Omega \right] &= \mu g(\omega\bar{\omega})^{0,5\mu} - \\ &- 4i\varepsilon m_1 (\omega\bar{\omega})^{0,5} \times \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega} \right)^{0,5} + \\ &+ i\varepsilon m_1 (\mu + 2)(\omega\bar{\omega})^{0,5(\mu-1)} \times \\ &\times \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega} \right)^{0,5} \left[\frac{\omega}{\bar{\omega}} - (\mu - 2)/(\mu + 2) \right]\end{aligned}\quad (19)$$

Определение функций $\omega(\zeta)$, $\Phi(\zeta)$ и $\Omega(\zeta)$ производим по граничным условиям (18) и (19). Для этого граничное условие (18) представим, используя (17) и сохраняя члены первого порядка малости по ε , в виде:

$$\begin{aligned}2\Phi(\zeta) + 2\Phi(\bar{\zeta}) &= (\mu + 2)gD^\mu \times \\ &\times \left(1 + 0,5\mu\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^{-k-1} + 0,5\mu\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\alpha}_k \zeta^{k+1} \right) - \\ &- i\varepsilon m_1 (\zeta - \bar{\zeta}^{-1}) \left[4D - (\mu + 2)D^{\mu-1} \right]\end{aligned}$$

Далее (19) выразим в виде двух функций, одна из которых голоморфна внутри, а другая – вне единичного контура χ :

$$F^-(\zeta) = F^+(\zeta);$$

$$F^- = 2\Phi(\zeta) - (\mu + 2)gD^\mu \cdot 0,5\mu\varepsilon \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^{-k-1} - i\varepsilon m_1 [4D - (\mu + 2)D^{\mu-1}] \quad (20)$$

$$F^+ = -2\bar{\Phi}(\bar{\zeta}) + (\mu + 2)gD^\mu \times$$

$$\times \left(1 + 0,5\mu\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\alpha}_k \zeta^{k+1} \right) - \quad (21)$$

$$- i\varepsilon m_1 \zeta [4D - (\mu + 2)D^{\mu-1}].$$

Если учесть граничные значения искомым функций $\Phi(\zeta)$ и $\Omega(\zeta)$ при $\zeta \rightarrow \infty$, когда главный вектор внешних сил $X + iY$ отличен от нуля и равен (с точностью до ε^2) массе пород в зоне запредельных деформаций, а на бесконечности действует гидростатическое поле напряжений p , то, согласно [7],

$$\Phi(\zeta) = 0,5p + \varepsilon \frac{X + iY}{2\pi(\chi + 1)} \zeta^{-1} + 0(\varepsilon^0);$$

$$\Omega(\zeta) = -\varepsilon \frac{(X - iY)\chi}{2\pi(\chi + 1)} \zeta^{-1} + 0(\varepsilon^2). \quad (22)$$

По теореме Лиувилля [7] две функции (20) и (21), являющиеся аналитическим продолжением друг друга через границу и голоморфные во всей плоскости, равны некоторой постоянной. Значение этой постоянной получим, устремляя $\zeta \rightarrow \infty$ в правой части равенства (20) с учетом (22):

$$F^+ = F^- = 2\Phi(\infty) = p. \quad (23)$$

Применим к (21) операцию комплексного сопряжения и, воспользовавшись (23) и первым условием (22), вновь устремим $\zeta \rightarrow \infty$, что позволит найти значение постоянной D :

$$D^\mu = r_* = \frac{2p}{(\mu + 2)q}. \quad (24)$$

Из (20) получим окончательное выражение для $\Phi(\zeta)$ с учетом (23) и (24):

$$\Phi(\zeta) = 0,5p \left(1 + 0,5\mu\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^{-k-1} \right) + \quad (25)$$

$$+ 0,5i\varepsilon m_1 \zeta^{-1} [4D - (\mu + 2)D^{\mu-1}].$$

Значение второй искомой функции $\Omega(\zeta)$ определим из (19), также сохраняя члены порядка первой степени ε :

$$\Omega(\zeta) = 0,5\mu g D^\mu \times$$

$$\times \left[\zeta^{-2} + 0,5(\mu + 2)\varepsilon \times \right.$$

$$\times \left. \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_k}{\zeta^{1-k}} + \frac{1}{2}(\mu + 2)\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\zeta^{k+3}} \right] - \quad (26) \right.$$

$$\left. - 2i\varepsilon m_1 D \zeta^{-3} + 0,5i\varepsilon m_1 (\mu + 2)D^{\mu-1} \times \right.$$

$$\left. \times [\zeta^{-1} - (\mu - 2)/(\mu + 2)\zeta^{-3}]. \right.$$

Из (17) следует $0 \leq k < \infty$, а из сопоставления поведения функции $\Omega(\zeta)$ при $\zeta \rightarrow \infty$ в (26) и во втором равенстве (22) вытекает, что $k \leq 0$. Отсюда заключаем, что $\alpha_k = 0$ при $k > 0$, и остается определить значение последней неизвестной постоянной α_0 . Для этого подставим в (26) граничное значение $\Omega(\zeta)$ из (22) и приравняем члены при ζ^{-1} :

$$-\varepsilon \frac{(X - iY)\chi}{2\pi(\chi + 1)} = 0,25\mu g D^\mu \cdot (\mu + 2)\bar{\alpha}_0 \varepsilon + \quad (27)$$

$$+ 0,5i\varepsilon m_1 (\mu + 2)D^{\mu-1}.$$

Компоненты главного вектора внешних сил определим из условия его равенства массе пород в кольцевой зоне запредельных деформаций радиуса D :

$$X + iY = -i\gamma\pi(D^2 - 1), \quad (28)$$

что сразу приводит к равенствам:

$$X = 0, \quad Y = -\gamma\pi(D^2 - 1).$$

Воспользовавшись (24), из (27) получим:

$$\alpha_0 = i\gamma \left(\frac{\chi}{\chi + 1} \frac{D^2 - 1}{\mu p} + \frac{2m_1}{\gamma\mu g D} \right). \quad (29)$$

На этом решение уравнения (7) закончено, и можно приступить к решению

уравнения (8). Поскольку частное решение (9) неоднородного уравнения (8) было определено ранее, ищем общее решение этого уравнения методом Фурье. Подставив функции $U_2 = R(r)T(\theta)$, приходим к необходимости решения вытекающих из (8) двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(\mu + 1)r^2 R'' - rR' + CR = 0;$$

$$T'' + CT = 0.$$

Аналогично (15) находим функцию напряжений:

$$U_2 U_2^{(0)} + U_2^{(1)} =$$

$$= (A_1 r^\lambda + A_1' r^{\bar{\lambda}}) (A_2 e^{n\theta} + A_2' e^{-n\theta}) +$$

$$+ m_2 r^3 \sin \theta. \quad (30)$$

где

$$n = i\sqrt{C};$$

$$\lambda = \frac{\mu + 2}{2(\mu + 1)} + i \left[\frac{C}{\mu + 1} - \frac{(\mu + 2)^2}{4(\mu + 1)^2} \right]^{0,5};$$

C — знакоположительная постоянная.

Подстановка (30) в граничные условия (14), которые являются общими для обоих уравнений (7) и (8), позволяет определить постоянные интегрирования:

$$C = 1. \quad n = i, \quad A_2 = \bar{A}_2' = im_2,$$

$$A_1 = A_1' = -d = -\frac{\mu}{\mu + 1}.$$

Тогда полная функция напряжений с учетом нулевого и первого приближения по параметру ε выглядит следующим образом:

$$U_2 = (\mu + 2)^{-1} gr^{\mu+2} +$$

$$+ \varepsilon m_2 \sin \theta (r^3 - 2d \operatorname{Re} r^\lambda). \quad (31)$$

Придерживаясь того же плана решения задачи, что и при нахождении α_0 , выпишем компоненты напряжений в зоне запредельных деформаций:

$$\sigma_r = gr^\mu + 2\varepsilon m_2 \sin \theta [r - d \operatorname{Re}(\lambda - 1)r^{\lambda-2}],$$

$$\sigma_\theta = (\mu + 1)gr^\mu +$$

$$+ 2\varepsilon m_2 \sin \theta [3r - d \operatorname{Re} \lambda (\lambda - 1)r^{\lambda-2}]; \quad (32)$$

$$\tau_{r\theta} = -2\varepsilon m_2 \cos \theta [r - d \operatorname{Re}(\lambda - 1)r^{\lambda-2}].$$

Перейдем к определению функций Мусхелишвили, для чего отобразим внешность контура L на внешность единичного круга ζ :

$$\omega(\zeta) = D \left(\zeta + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \zeta^{-k} \right), \quad (33)$$

где β_k, k — параметры, подлежащие определению.

Не приводя подробных выкладок, запишем окончательную формулу для функции Мусхелишвили $\Phi_2(\zeta)$, которую отыскиваем с помощью теоремы Лиувилля с точностью до $0(\varepsilon^2)$:

$$\Phi_2(\zeta) = 0,5p \left(1 + 0,5\mu\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \zeta^{-k-1} \right) +$$

$$+ 0,5i\varepsilon m_2 \zeta^{-1} [4D - d \operatorname{Re}(\lambda^2 - 1)D^{\lambda-2}]. \quad (34)$$

Из (32) и (33) найдем значение второй искомой функции:

$$2\Omega_2(\zeta) = \mu p \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \beta_k \zeta^{-k-3} +$$

$$+ i\varepsilon m_2 \zeta^{-2} \cdot [4D - d \operatorname{Re}(\lambda^2 - 1)D^{\lambda-2}] +$$

$$+ \mu g D^\mu \left[\zeta^{-2} + \frac{1}{2}(\mu + 2)\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\beta}_k \zeta^{k-1} + \right.$$

$$\left. + 0,5(\mu - 2)\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \zeta^{-k-3} \right] -$$

$$- i\varepsilon m_2 \zeta^{-3} [4D - d \operatorname{Re}(\lambda^2 - 1)D^{\lambda-2}] +$$

$$+ i\varepsilon m_2 \zeta^{-1} d \operatorname{Re} \lambda (\lambda - 1) D^{\lambda-2}.$$

$$(35)$$

Из граничных условий (22) для $\Omega(\zeta)$ при $\zeta \rightarrow \infty$ следует, что $\beta_k = 0$ при $k > 0$, а для случая $k = 0$ получим β_0 , приравняв коэффициенты при ζ^{-1} в (35).

Воспользовавшись (28), определяем из последнего равенства после упрощений значение искомого параметра:

$$\beta_0 = \frac{i}{\mu\varphi} \cdot \left[\frac{\chi\gamma(B^2 - 1)}{(\chi + 1)} + m_2 d \operatorname{Re} \frac{\lambda(\lambda - 1)}{D^{-\lambda+2}} \right]. \quad (36)$$

Таким образом, из решения уравнений (7) и (8) получили оценку искажения формы упругопластической границы вокруг отверстия силами гравитации в виде уравнения

$$\omega(\zeta) = D(\zeta + \alpha_0 + \beta_0). \quad (37)$$

Выполним демонстрационный пример. Произведем численные оценки влияния гравитационных сил на форму упругопластической границы в окрестности восточного вентиляционного штрека ш. им. газеты "Социалистический Донбасс" [8], если условно считать, что там не наблюдается других отклонений от осесимметричного случая, а исходные данные равны:

$$p = 20 \text{ МПа}; \quad \mu = 3,0; \quad q = 0,05 \text{ МПа}; \\ \gamma = 2,5 \text{ бар}; \quad D = 5,44 \text{ м}.$$

Параметр α_0 найдем из (29): $\alpha_0 = 0,03i$.

Чтобы определить параметр β_0 , найдем вспомогательные величины:

$$\lambda = 0,125 + 0,48i = t + is; \\ \operatorname{Re} \lambda(\lambda - 1)D^{\lambda-2} = \operatorname{Re}(t + is)(t - 1 + is)D^{t-2} \times \\ \times [\cos s \ln D + i \sin s \ln D] \approx 0,007.$$

Подставляя в (36), получаем $|\beta_0| < 10^{-7}$. Отсюда следует, что вклад от параметра β_0 пренебрежимо мал и основную роль в количественной оценке массовых сил играет параметр α_0 .

В общем случае силы собственного веса среды приводят к конкурентному сдвигу всей зоны запредельных деформаций вверх по отвесной линии на 3 %. Однако, как показывает анализ зависимости (29), влияние сил собственного веса резко возрастает при малых значениях отпора крепи q , причем оценка влияния оказывается не-

сколько заниженной, т. к. параметр перестает в этом случае быть "малым". Следовательно, возникает необходимость получения количественной оценки эффекта сверху с некоторым запасом, гарантирующим требуемый минимум безопасности.

Для этого решим упрощенное дифференциальное уравнение, исходя из допущения, что массовые силы в зоне запредельных деформаций направлены радиально к центру отверстия (рис. 2), что сразу приводит к осевой симметрии уравнения (1):

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = -\gamma. \quad (38)$$

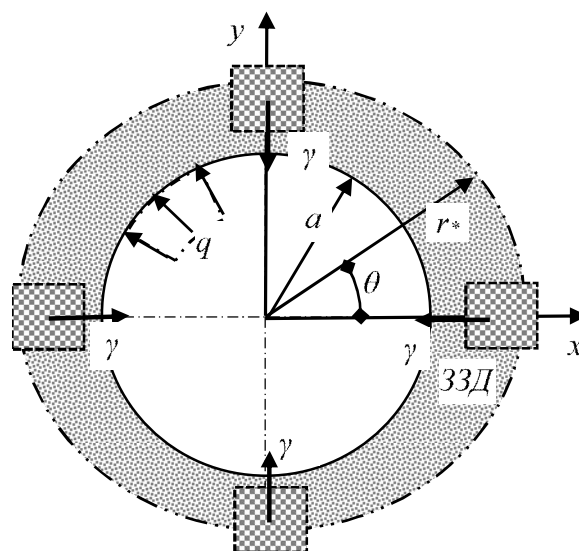


Рисунок 2 Расчетная схема учета массовых сил в 33Д вокруг выработки

Присовокупив условие пластичности (2) и ранее сформулированные граничные условия:

на контуре при $r = a$ $\sigma_r = q$; $\tau_{r\theta} = 0$,

и на границе при $r = r_* = D$ $\sigma_r + \sigma_\theta = 2p$,

где a — радиус выработки, решаем уравнение (38), что дает:

$$\sigma_r = \left(q - \frac{\gamma a}{\mu - 1} \right) \left(\frac{r}{a} \right)^\mu + \frac{\gamma r}{\mu - 1}; \quad (39) \\ \sigma_\theta = (\mu + 1)\sigma_r; \quad \tau_{r\theta} = 0.$$

Радиус упругопластической границы оказывается равным:

$$r_*^\mu = \left(\frac{2p}{\mu+2} - \frac{\gamma D}{\mu-1} \right) \left(q - \frac{\gamma \alpha}{\mu-1} \right)^{-1} \approx \frac{2p}{(\mu+2) \cdot q_*}; \quad (40)$$

$$\text{где } q_* = q - \frac{\gamma \alpha}{\mu-1}; \quad \frac{2p}{\mu+2} \gg \frac{\gamma D}{\mu-1}.$$

Сравнивая (40) с (24), мы видим, что формулы подобны, при этом влияние собственного веса среды можно учесть, заменив номинальный отпор q крепи, установленной в горной выработке, на эффективный отпор q_* .

Таким образом, влияние сил собственного веса пород в ЗЗД с некоторым запасом можно учесть эффективным отпором крепи, и записать в виде:

$$q_* = q \pm \frac{\gamma \alpha}{\mu-1}, \quad (41)$$

где знак плюс следует брать для почвы, а знак минус — для кровли выработки.

Анализ формулы (41), которая в одинаковой степени пригодна для использования при "малом" и "большом" влиянии собственного веса среды, приводит к важной в практическом отношении оценке минимальной грузонесущей способности крепи, устанавливаемой в горной выработке. Оценить требуемый минимальный отпор крепи можно из условия запрета равенства нулю знаменателя в зависимости (40), а для исключения сингулярности, чтобы $q_* > 0$, необходимо:

$$q_{\min} > \frac{\gamma \alpha}{\mu-1}. \quad (42)$$

Если ЗЗД формировалась без существенного отпора крепи, происходит значительное расслоение пород в кровле и потеря их сцепления, т. е. среда уподобится сыпучей: $c = 0$; $\mu = A - 1$ и минимальный отпор крепи равен:

$$q_{\min} \geq \frac{\gamma \alpha}{A-2}. \quad (43)$$

Разумеется, понятие минимального отпора крепи имеет смысл лишь для пород кровли, тогда как для почвы выработки отсутствие крепи не приводит, как следует из (41), к особенностям при определении радиуса ЗЗД.

Если угол внутреннего трения пород равен 20° , то $A - 2 \approx 0$ и из (43) следует, что существует особое решение уравнения (38), которое после подстановки $\mu = A - 1 = 1$, сводится к следующему:

$$\sigma_r = \frac{r}{\alpha} \left(q - \gamma \alpha \ln \frac{r}{\alpha} \right); \quad \sigma_\theta = 2\sigma_r; \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad (44)$$

что дает следующую оценку для минимального отпора крепи в породах типа аргиллитов:

$$q_{\min} > \gamma \alpha \cdot \ln \left(\frac{r_*}{\alpha} \right). \quad (45)$$

Минимальный отпор крепи оказался зависимым от размера ЗЗД в отличие от его значения для пород с большим углом внутреннего трения по формуле (41).

Представление об изменении безразмерного радиуса ЗЗД при уменьшении отпора податливой крепи в кровле выработки в разных типах пород можно получить из рисунка 3.

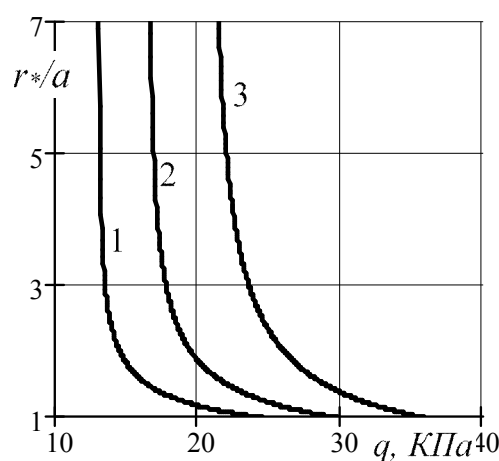


Рисунок 3 Влияние массовых сил на относительный размер ЗЗД в разных типах пород:

1 – аргиллиты, 2 – алевролиты, 3 – песчаники

Поведение кривых оказывается подобным для разных типов пород: по мере уменьшения отпора крепи наблюдается рост размеров ЗЗД и при достижении минимального значения происходит резкое возрастание относительного радиуса ЗЗД, приводящее к завалу выработки.

Эту закономерность подтверждают и графики на рисунке 4, где можно проследить, как изменяется требуемый минимальный отпор крепи при расположении выработки на разных глубинах.

Для пород с $A > 2$ нагрузка на крепь по мере роста ЗЗД асимптотически стремится к минимальному отпору крепи, а в глинистых породах (при $A = 2$) с увеличением ЗЗД нагрузка на крепь увеличивается. Таким образом, в вязких породах с малым углом внутреннего трения, которые обычно склонны к пластическому течению, для уменьшения смещений и сохранения выработки необходимо предусмотреть жесткий режим работы крепи при высокой ее грузонесущей способности.

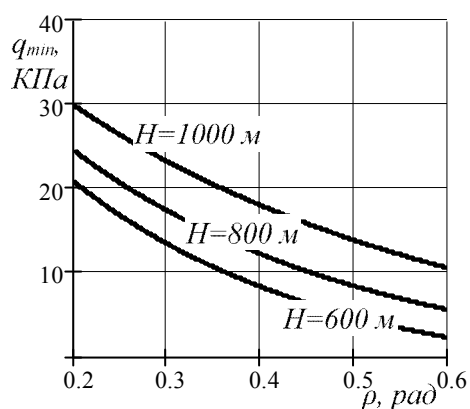


Рисунок 4 Влияние угла внутреннего трения ρ на изменение минимального отпора крепи q_{min} на разных глубинах разработки H

Изменение несущей способности крепи оказывает основное влияние на размер ЗЗД в кровле выработки и совсем незначительно сказывается на размере ЗЗД в почве. На рисунке 5 показано, как сдвигается граница ЗЗД вверх из-за влияния массовых сил, действующих на породу в кровле и почве. Чем меньше эффективный отпор крепи в кровле,

тем больше вытягивается и растет граница ЗЗД вверх, тем больше вероятность обрушения пород в выработку.

Численные оценки показывают, что в наиболее распространенных горногеологических условиях требуемый минимальный отпор крепи должен составлять согласно графикам рисунка 3 в пределах от 25 до 40 КПа в зависимости от типа породы и ее прочностных свойств. Если обычная подготовительная горная выработка имеет ширину от 4 до 5 м, то минимальная грузонесущая способность крепи должна составлять не менее 10...20 т/м.

С учетом вероятностного разброса параметров проявлений горного давления, вызванных вариабельностью свойств горных пород, точностью их лабораторного определения, неопределенностью исходных данных о напряженном состоянии массива горных пород и систематических ошибок в формулах расчета, полученных при неизбежных идеализациях принятых математических моделей, коэффициент запаса при назначении отпора крепи должен быть порядка 1,5...2,5.

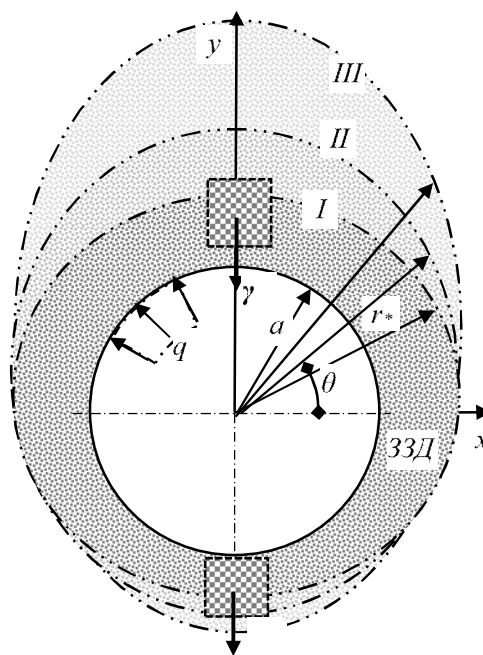


Рисунок 5 Смещение границы ЗЗД вокруг выработки по мере снижения эффективного отпора крепи q в кровле и почве

Принимая это во внимание, можно заключить, что минимальный отпор крепи должен составлять около 5...6 т/м, или для рамной стальной крепи, устанавливаемой в выработке через 1 м, — не менее 20...30 т на раму. Именно такие значения грузонесущей способности стальной крепи из спецпрофиля (25...40 т) имеют существующие рамные конструкции, работающие в податливом режиме. Поэтому можно с полным основанием утверждать, что надежность крепления горных выработок не вполне достаточна и крепи работают на верхнем пределе своей несущей способности. Этот вывод подтверждается многолетним опытом эксплуатации крепи и шахтными инструментальными наблюдениями за проявлениями горного давления в выработках [8], которые фиксируют многочисленные факты разрушения и деформирования конструкций крепи.

Выводы

Выполненные исследования показали важность методически корректного учета многочисленных неосесимметричных факторов, влияющих на особенности проявлений горного давления в капитальных и подготовительных выработках и способных значительно исказить решения, которые в настоящее время получают из существующих нормативных материалов и документов по проектированию горных выработок.

Библиографический список

1. Витке, В. *Механика скальных пород [Текст]* / В. Витке. — М. : Недра, 1990. — 439 с.
2. Hoek, E. *Underground excavation in rock [Text]* / E. Hoek, E. T. Braun. — London : The Inst. Of Min. & Metall, 1980. — 230 pp.
3. Jovanović, P. *Projektovanje i proračun podgrade horizontalnih podzemnih prostorija T. 2 [Text]* / Petar Jovanović. — Beograd : Rudarsko-geološki fakultet Univerziteta, 1994. — 316 str.
4. Alimzhanov, M. T. *Methods of continuum nonlinear mechanics in problems of rock pressure control at drilling deep Holes [Text]* / M. T. Alimzhanov // *Advances in Mechanics, Int. Jour.* — Warsaw, 1992. — vol. 15., № 3–4. — P. 41–69.
5. Tajduś, A. *Geomechanika w budownictwie podziemnym. Projectowanie i budowa tuneli [Text]* / Tajduś Antoni, Gała Marek, Tajduś Krzysztof. — Krakow : Akademia AGH, 2012. — 762 s.
6. Ивлев, Д. Д. *Метод возмущений в теории упругопластического тела [Текст]* / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. — М. : Наука, 1978. — 208 с.
7. Мухелишвили, Н. И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст]* / Н. И. Мухелишвили. — М. : Наука, 1966. — 700 с.

Наиболее перспективным подходом по расчету и прогнозу горного давления является аналитический метод геомеханики, основанный на применении метода малого параметра в различных разделах прикладной математики и горной геомеханики. Он позволяет с единых методологических позиций значительно расширить область применения и достоверность результатов прогноза.

Используя метод малого параметра и решая краевую задачу упругопластического равновесия вокруг капитальной горной выработки с учетом ранее разработанного порождающего решения о развитии ЗЗД, определена степень возмущения границы ЗЗД, вызванной массовыми силами, действующими на разрушенную породу.

Показано, что в первом, достаточно достоверном приближении, граница ЗЗД конгруэнтно сдвигается вверх, величина сдвига зависит от размеров ЗЗД и свойств пород.

Анализом поведения ЗЗД под действием массовых сил определено предельное минимальное значение отпора податливой крепи, ниже которого происходит завал горной выработки. Исследованиями выявлены параметры, влияющие на минимальный отпор крепи и даны практические рекомендации по выбору крепления горных выработок.

8. Литвинский, Г. Г. Шахтные исследования закономерностей развития проявлений горного давления в капитальных выработках [Текст] / Г. Г. Литвинский // В сб.: Совершенствование технологии проведения горных выработок. — Кемерово : КузПИ, 1983. — С. 68–78.

© Литвинский Г. Г.

Рекомендована к печати зав. каф. СПСиШ ДонНТУ, д.т.н., проф. Борщевским С. В.

Статья поступила в редакцию 28.06.17.

проф. Литвинський Г. Г. (ДонДТУ, м. Алчевськ, ЛНР, ligag@ya.ru)

ОБҐРУНТУВАННЯ МІНІМАЛЬНОГО ОПОРУ КРІПЛЕННЯ В ГІРНИЧІЙ ВИРОБЦІ

На великих глибинах розробки навколо виробок утворюється зона поза межних деформацій (ЗПД), від якої залежать особливості проявів гірського тиску. Мета досліджень – визначити параметри кріплення при обліку ваги порід в ЗПД. Для оцінки впливу основних неосесиметричних факторів використано метод малого параметру. Вирішено задачу про форму та розміри ЗПД при обліку масових сил. Показано, що ЗПД конгруентно зміщується вгору, а її розміри залежать від опору кріплення. Вперше отримано формули для визначення мінімального опору кріплення і надано практичні рекомендації щодо вибору її параметрів.

Ключові слова: гірнична виробка, гірський тиск, зона поза межних деформацій, неосесиметричні фактори, метод малого параметра, масові сили, розподіл напружень, мінімальний опір кріплення.

prof. Litvinsky G. G. (DSTU, Alchevsk, LPR, ligag@ya.ru)

THE JUSTIFICATION OF MINIMUM RESISTANCE FOR THE MINING SUPPORTS

The zone of post limit deformations (ZPLD) is formed around an excavation at greater depths, which affect the peculiarities of rock pressure manifestations. The purpose of the research is to determine the parameters of the mining supports in consideration to the weight of the rocks in the ZPLD. To assess the impact of main not symmetric factors we used the method of a small parameter. The problem on the shape and dimensions of the ZPLD considering mass forces is solved. It is shown that ZPLD shifts up congruently, and its dimensions depend on the resistance of the lining support. For the first time, the formula to determine the minimum resistance to bolting is obtained and practical recommendations for the choice of its parameters are proposed.

Key words: excavation, rock pressure, zone of post limit deformations, not symmetric factors, method of a small parameter, mass forces, stress distribution, minimum resistance of the lining.